

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНОЙ  
ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

Учебное пособие

Казань  
Казанский государственный университет  
имени В.И. Ульянова-Ленина  
2007

Печатается по решению  
кафедры прикладной математики  
Казанского государственного университета

**Научный редактор**

доктор физико-математических наук, профессор Н.Б. Плещинский

**Карчевский Е.М.** Математические модели спектральной теории диэлектрических волноводов. Учебное пособие / Е.М. Карчевский. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2007. — 130 с.

Излагаются основные способы построения математических моделей спектральной теории диэлектрических волноводов.

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования, а также научных сотрудников, чьи интересы лежат в указанной области.

УДК 517.958:621.372.8

---

---

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1. Основные уравнения спектральной теории диэлектрических волноводов</b> . . . . .	6
§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн . . . . .	6
§ 2. Электромагнитные потенциалы . . . . .	10
§ 3. Условия на границах раздела сред . . . . .	14
§ 4. Поведение амплитуд собственных волн на бесконечности . . . . .	19
§ 5. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода . . . . .	26
§ 6. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения . . . . .	32
Задачи и упражнения . . . . .	38
<b>ГЛАВА 2. Задачи о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления</b> . . . . .	40
§ 1. Элементы спектральной теории оператор-функций . . . . .	40
§ 2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	42
§ 3. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	55
Задачи и упражнения . . . . .	67
<b>ГЛАВА 3. Задачи о собственных волнах волноводов с размытой границей</b> . . . . .	70
§ 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	70
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	78
Задачи и упражнения . . . . .	86
<b>ГЛАВА 4. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде</b> . . . . .	88
§ 1. Элементы теории сингулярных интегральных уравнений . . . . .	88
§ 2. Спектральная задача для сингулярного интегрального уравнения . . . . .	91
§ 3. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора . . . . .	97
Задачи и упражнения . . . . .	105
<b>ГЛАВА 5. Численные методы решения задач спектральной теории диэлектрических волноводов</b> . . . . .	107
§ 1. Проекционные методы решения нелинейных спектральных задач . . . . .	107
§ 2. Метод Галеркина решения задач о собственных волнах . . . . .	109
§ 3. Численные эксперименты . . . . .	115
Задачи и упражнения . . . . .	120
<b>Литература</b> . . . . .	126

---

---

## Предисловие

Книга является расширенным изложением курсов лекций, читавшихся автором для студентов кафедры прикладной математики факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, специализирующихся в области математического моделирования.

Цель книги — познакомить читателя с методами построения общих математических моделей спектральной теории диэлектрических волноводов. Особенностью данного пособия является то, что математические модели волноводов различных типов систематически строятся на основе методов теории сингулярных интегральных уравнений, а качественные свойства спектра изучаются с помощью общих результатов спектральной теории несамосопряженных операторов.

Наиболее подробно рассматриваются задачи о собственных волнах волноводов двух типов, находящихся в однородной окружающей среде: волноводов с постоянным показателем преломления и произвольным гладким контуром поперечного сечения, а также волноводов с переменным и гладким во всей плоскости поперечного сечения показателем преломления — волноводов с размытой границей. Задачи ставятся в наиболее общем виде, и в рамках единых математических моделей изучаются свойства всех известных типов собственных волн: “поверхностных”, “комплексных” и “вытекающих”, амплитуды которых удовлетворяют “парциальным” условиям излучения. Рассматривается также задача о собственных волнах волновода в плоско-слоистой окружающей среде.

Отдельная глава посвящена разработке и обоснованию проекционных методов решения нелинейных спектральных задач, возникающих при построении математических моделей диэлектрических волноводов.

Общие постулаты и теоремы спектральной теории диэлектрических волноводов сопровождаются упражнениями и задачами. Упражнения направлены на выработку у студентов навыков самостоятельного выполнения математических выкладок. Задачи могут служить темами семинарских занятий, курсовых и дипломных работ. Они

должны помочь прояснить “физическую” сущность изучаемых теоретических положений.

Книга рассчитана на студентов старших курсов физико-математических факультетов. Она будет полезна также и аспирантам соответствующих специальностей. Предполагается, что читатель знаком с общими университетскими курсами естественно-научного цикла. Тем не менее, в отдельной главе формулируются основные уравнения спектральной теории диэлектрических волноводов, основанные на уравнениях Максвелла. В книге излагаются также элементы спектральной теории оператор-функций, теории сингулярных интегральных уравнений, теории сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач, не рассматриваемые обычно в общих курсах.

Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедры прикладной математики Казанского государственного университета. Автор приносит им свою искреннюю признательность. Рукопись книги была внимательно прочитана Н.Б. Плещинским, который взял на себя труд по ее редактированию. Автор с благодарностью учел все его замечания.

---

---

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

### § 1. Уравнения для амплитуд собственных волн

Спектральная теория диэлектрических волноводов основывается на следующих однородных уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения (используется декартова система координат):

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)^T, \quad \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)^T$$

есть векторы напряженности электрического и магнитного поля с координатами

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$x_1, x_2, x_3$  — пространственные переменные;  $t$  — время;  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $n$  — показатель преломления;  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Векторная операция  $\operatorname{rot}$  в декартовой системе координат определена равенством:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_2 - \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_3 \\ \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_3 - \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_1 - \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления  $n_\infty > 0$ . Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $0x_3$ , показатель преломления  $n$  внутри цилиндра не зависит от  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Мы будем изучать собственные волны, то есть решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} (x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x) \exp(i(\beta x_3 - \omega t)) \right). \quad (1.2)$$

Здесь

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$$

есть комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ;  $\omega > 0$  — частота электромагнитных колебаний;  $\beta$  — комплексный параметр, который называется продольной постоянной распространения.

В задачах о собственных волнах диэлектрических волноводов нужно найти такие значения  $\omega$  и  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид (1.2), удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода.

Построим уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн. Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Пусть  $\Omega$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ее граница  $\Gamma$  — гладкая кривая;  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n = n_\infty = \text{const}$  при  $x \in \Omega_\infty$ ;  $n$  — гладкая вещественная функция в области  $\Omega$ ;

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0;$$

функция  $n$  может иметь разрыв первого рода на контуре  $\Gamma$ . Схематическое изображение поперечного сечения волновода приведено на рисунке 1.

Подставляя векторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  вида (1.2) в уравнения Максвелла (1.1), получим систему уравнений

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.3)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \partial E_3 / \partial x_2 - i\beta E_2 \\ i\beta E_1 - \partial E_3 / \partial x_1 \\ \partial E_2 / \partial x_1 - \partial E_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

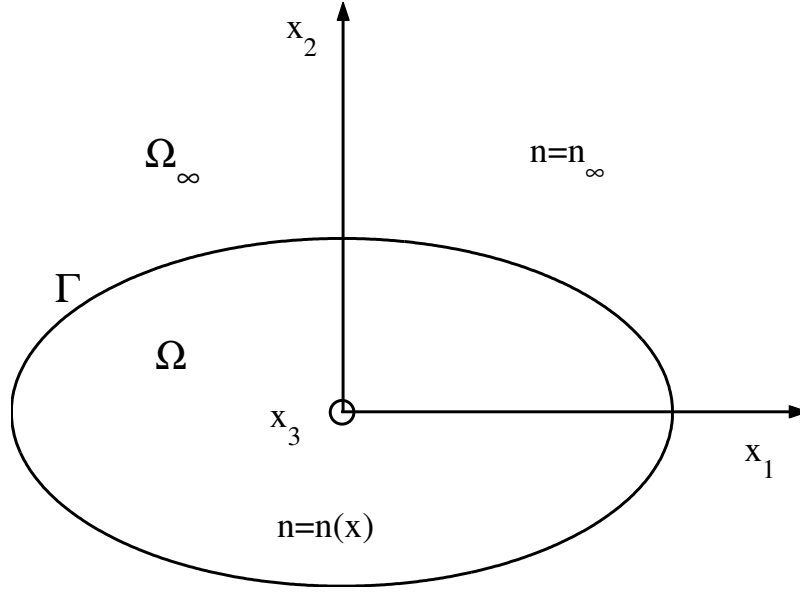


Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического диэлектрического волновода в однородной окружающей среде

Пусть  $F = (F_1, F_2, F_3)^T(x)$  и  $u = u(x)$  — достаточно гладкие вектор-функция и скалярная функция соответственно. Введем дифференциальные операторы:

$$\operatorname{div}_\beta F = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2 + i\beta F_3,$$

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2,$$

$$\operatorname{grad}_\beta u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, i\beta u)^T,$$

$$\operatorname{grad} u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, 0)^T.$$

Непосредственными вычислениями легко проверить справедливость следующих формул:

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = \Delta u - \beta^2 u, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{rot}_\beta F) = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div}_\beta (uF) = u \operatorname{div}_\beta F + F \cdot \operatorname{grad} u, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta F) = -\Delta F + \beta^2 F + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta F), \quad (1.9)$$

$$\Delta (\operatorname{div}_\beta F) = \operatorname{div}_\beta (\Delta F). \quad (1.10)$$

Здесь и далее символом “.” обозначено скалярное произведение векторов.



**Утверждение 1.1.** Пусть  $E, H$  — нетривиальное решение системы уравнений (1.3). Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E) = k^2 n^2 E, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (n^{-2} \operatorname{rot}_\beta H) = k^2 H, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 E) = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div}_\beta H = 0, \quad (1.14)$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Равенства (1.11) и (1.12) легко получить, применив операцию  $\operatorname{rot}_\beta$  к правым и левым частям уравнений (1.3). Для того, чтобы получить равенства (1.13) и (1.14), надо применить к правым и левым частям уравнений (1.3) операцию  $\operatorname{div}_\beta$  и воспользоваться формулой (1.6).  $\square$

Вещественный параметр  $k$  называется продольным волновым числом.

**Утверждение 1.2.** Пусть  $E, H$  — нетривиальное решение системы уравнений (1.3); показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ . Тогда в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.15)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (1.16)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функция  $n$  принимает постоянное значение  $n_\infty > 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . По предположению в области  $\Omega$  функция  $n$  также принимает положительное постоянное значение  $n_+$ . Таким образом, применяя к уравнениям (1.11), (1.12) формулу (1.9), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 n_+^2 E, & x \in \Omega, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 n_+^2 H, & x \in \Omega, \\ -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 n_\infty^2 E, & x \in \Omega_\infty, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 n_\infty^2 H, & x \in \Omega_\infty. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, равенства (1.14) и равенства

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{E} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

справедливого при сделанных предположениях относительно  $n$  в силу уравнения (1.13), получаем требуемое утверждение.  $\square$

## § 2. Электромагнитные потенциалы

Для определения комплексных амплитуд собственных волн на плоскости нужно найти нетривиальные решения системы уравнений (1.3), то есть определить шесть скалярных функций, являющихся компонентами векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Во многих случаях оказывается удобным ввести некоторые вспомогательные функции, называемые электромагнитными потенциалами, через которые определенным образом выражаются амплитуды собственных волн. Введем в рассмотрение электромагнитные потенциалы, следуя [12].

**Определение 1.1.** Вектор-функция  $\mathbf{A}(x)$  и скалярная функция  $\varphi(x)$  называются векторным потенциалом и скалярным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если справедливо представление

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{A} - \operatorname{grad}_\beta\varphi, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}_\beta\mathbf{A}. \quad (1.18)$$

**Утверждение 1.3.** Для любых ненулевых векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющих системе уравнений (1.3), существует векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$ . Если потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  связаны друг с другом условием Лоренца,

$$\operatorname{div}_\beta\mathbf{A} = i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \varphi, \quad (1.19)$$

то они для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям:

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \mathbf{A} = -\mathbf{J}, \quad (1.20)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \varphi = -\rho, \quad (1.21)$$

где

$$\mathbf{J} = -i\omega\varepsilon_0(n^2 - n_\infty^2)\mathbf{E}, \quad (1.22)$$

$$\rho = -\mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевые векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют системе уравнений (1.3). Поскольку в силу утверждения 1.1

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{H} = 0,$$

то существует такая вектор-функция  $\mathbf{A}$ , что имеет место представление (1.18). Подставим (1.18) в первое из уравнений (1.3) и получим равенство

$$\operatorname{rot}_\beta (\mathbf{E} - i\omega\mu_0\mathbf{A}) = 0.$$

Следовательно, существует такая скалярная функция  $\varphi$ , что справедливо равенство (1.17). Таким образом, любое нетривиальное решение системы уравнений (1.3) может быть выражено через функции  $\mathbf{A}(x)$  и  $\varphi(x)$ .

Определим теперь, каким уравнениям удовлетворяют потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Подставим представления (1.18) и (1.17) во второе из уравнений (1.3). В результате получим равенство

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{A}) - k^2 n_\infty^2 \mathbf{A} = i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{grad}_\beta \varphi + \mathbf{J}, \quad (1.23)$$

где вектор-функция  $\mathbf{J}$  определена по формуле (1.22). Из уравнения

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) = 0,$$

формулы (1.7) и представления (1.17) получаем цепочку равенств:

$$0 = n^2 \operatorname{div}_\beta \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} n^2 = n^2 \operatorname{div}_\beta (i\omega\mu_0 \mathbf{A} - \operatorname{grad}_\beta \varphi) + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} n^2.$$

Отсюда и из формулы (1.5) следует, что

$$-i\omega\mu_0 \operatorname{div}_\beta \mathbf{A} + \Delta\varphi - \beta^2 \varphi = \mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2). \quad (1.24)$$

Как известно [12], в силу неоднозначности определения потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  можно наложить на них дополнительное условие, которое позволит упростить уравнения (1.23) и (1.24). Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  удовлетворяют условию Лоренца (1.19). Тогда из (1.23) и (1.24) при помощи формулы (1.9) получим уравнения (1.20) и (1.21).  $\square$

**Определение 1.2.** Вектор-функция  $\Pi(x)$  называется вектором Герца или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если справедливо представление

$$\mathbf{E} = (k^2 n_\infty^2 + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{rot}_\beta \Pi. \quad (1.26)$$

**Утверждение 1.4.** Для любого нетривиального решения  $E, H$  системы уравнений (1.3) существует поляризаационный потенциал  $\Pi$ . Потенциал  $\Pi$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) E. \quad (1.27)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выразим потенциалы  $A$  и  $\varphi$  через один вектор  $\Pi$ . Пусть

$$\varphi = -\operatorname{div}_\beta \Pi.$$

Тогда из условия Лоренца (1.19) имеем

$$A = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \Pi.$$

Отсюда и из (1.20), (1.21) получим два уравнения для  $\Pi$ , а именно уравнение

$$-\operatorname{div}_\beta [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = E \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2) \quad (1.28)$$

и уравнение (1.27).

Проверим, что уравнение (1.28) является следствием уравнения (1.27). С этой целью докажем сначала справедливость равенства

$$\operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) E) = n_\infty^2 E \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2). \quad (1.29)$$

Действительно, в силу (1.7)

$$\operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) E) = (n^2 - n_\infty^2) \operatorname{div}_\beta E + E \cdot \operatorname{grad} (n^2 - n_\infty^2).$$

Из (1.13) и (1.7) следует, что

$$-\operatorname{div}_\beta E = E \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2).$$

Используя два последних равенства, получим уравнение (1.29). Пусть справедливо равенство (1.27). Применим к обеим частям равенства (1.27) операцию  $\operatorname{div}_\beta$ . Учитывая (1.29), придем к (1.28). Наоборот, из (1.28) и (1.29) имеем

$$-\operatorname{div}_\beta [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) E),$$

откуда следует, что достаточно потребовать от вектора  $\Pi$ , чтобы выполнялось уравнение (1.27).

Выразим теперь векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через  $\Pi$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{A} - \text{grad}_\beta\varphi = i\omega\mu_0(-i\omega\varepsilon_0n_\infty^2\Pi) + \text{grad}_\beta\text{div}_\beta\Pi = \\ &= (k^2n_\infty^2 + \text{grad}_\beta\text{div}_\beta)\Pi, \\ \mathbf{H} &= \text{rot}_\beta\mathbf{A} = -i\omega\varepsilon_0n_\infty^2\text{rot}_\beta\Pi.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно определению 1.2 вектор  $\Pi$  является поляризационным потенциалом.  $\square$

**Определение 1.3.** Скалярные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называются потенциальными, если справедливы представления

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{i}{k^2n^2 - \beta^2} \left( \mu_0\omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{-i}{k^2n^2 - \beta^2} \left( \mu_0\omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right),\end{aligned}\tag{1.30}$$

$$\mathbf{E}_3 = u,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \frac{i}{k^2n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0n^2\omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{i}{k^2n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0n^2\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right),\end{aligned}\tag{1.31}$$

$$\mathbf{H}_3 = v.$$

**Утверждение 1.5.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются следующие условия:

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty.\tag{1.32}$$

Тогда для любого нетривиального решения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  системы уравнений (1.3) существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega,\tag{1.33}$$

$$[\Delta + (k^2n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty.\tag{1.34}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевые векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют системе уравнений (1.3). Запишем систему уравнений (1.3) в скалярном виде:

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - i\beta E_2 = i\omega\mu_0 H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - i\beta H_2 = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_1, \quad (1.35)$$

$$i\beta E_1 - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = i\omega\mu_0 H_2, \quad i\beta H_1 - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_2, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = i\omega\mu_0 H_3, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_3. \quad (1.37)$$

Пусть  $u = E_3$ ,  $v = H_3$ . Уравнения (1.35), (1.36) запишем в виде двух систем относительно неизвестных функций  $E_1$ ,  $H_2$  и  $H_1$ ,  $E_2$ :

$$-i\omega\varepsilon_0 n^2 E_1 + i\beta H_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad (1.38)$$

$$i\beta E_1 - i\omega\mu_0 H_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1};$$

$$i\omega\mu_0 H_1 + i\beta E_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (1.39)$$

$$i\beta H_1 + i\omega\varepsilon_0 n^2 E_2 = \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Если выполняются условия (1.32), то определители систем уравнений (1.38) и (1.39) отличны от нуля. Следовательно, эти системы однозначно разрешимы. Решим их и получим представления (1.30) и (1.31). Таким образом, при сделанных предположениях существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ .

То, что потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (1.33), (1.34), непосредственно следует из утверждения 1.2. Заметим, что уравнения (1.33), (1.34) также можно получить, если подставить представления (1.30), (1.31) в равенства (1.37).  $\square$

### § 3. Условия на границах раздела сред

Если в пространстве имеются области, на границах которых показатель преломления  $n$  претерпевает разрыв, то на этих поверхностях раздела сред векторы напряженностей электромагнитного поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$

также теряют гладкость. На поверхностях разрыва должны быть заданы определенные условия сопряжения для векторов электромагнитного поля.

Обозначим символом  $\Sigma$  поверхность раздела сред. Пусть  $\nu$  — единичный вектор нормали, а  $\tau$  — единичный вектор касательной в точке  $x$  поверхности  $\Sigma$ . Условия сопряжения на гладкой поверхности разрыва  $\Sigma$  заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  должны быть непрерывны (см., например, [12]):

$$\nu \times \mathcal{E}^+ = \nu \times \mathcal{E}^-, \quad x \in \Sigma, \quad (1.40)$$

$$\nu \times \mathcal{H}^+ = \nu \times \mathcal{H}^-, \quad x \in \Sigma. \quad (1.41)$$

Здесь  $\mathcal{E}^+$  — предельное значение функции  $\mathcal{E}$  из той области, куда направлен вектор нормали  $\nu$ ,  $\mathcal{E}^-$  — предельное значение функции  $\mathcal{E}$  из области противоположной относительно поверхности  $\Sigma$ ;  $\nu \times \mathcal{E}$  — векторное произведение векторов, которое в декартовых координатах определяется следующим образом:

$$\nu \times \mathcal{E} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть  $E$ ,  $H$  — ненулевые комплексные амплитуды собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (1.2). Тогда согласно (1.40), (1.41) функции  $E$ ,  $H$  должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \Sigma, \quad (1.42)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Sigma. \quad (1.43)$$

Приступим к выводу условий (1.40), (1.41). Пусть  $S$  — некоторая поверхность в трехмерном пространстве, ограниченная достаточно гладким контуром  $L$ ; через  $\nu$  и  $\tau$  обозначим единичный вектор внешней по отношению к поверхности  $S$  нормали и единичный касательный вектор в точке контура  $L$ . Наряду с дифференциальной формой записи системы уравнений Максвелла (1.1) используется интегральная форма (см., напр., [26]):

$$\int_L \mathcal{E} \cdot \tau dl = - \int_S \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \cdot \nu ds, \quad (1.44)$$

$$\int_L \mathcal{H} \cdot \tau dl = \int_S \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cdot \nu ds. \quad (1.45)$$

Выберем произвольную точку  $x \in \Sigma$ . Рассечем поверхность раздела сред  $\Sigma$  плоскостью  $P$ , проходящей через точку  $x$ , так, чтобы  $\nu \in P$ . Пусть касательный вектор  $\tau$  также принадлежит плоскости  $P$ . Обозначим через  $\kappa$  единичный вектор с началом в точке  $x$ , перпендикулярный плоскости  $P$ , такой, что выполняется следующее условие:

$$\tau = \kappa \times \nu. \quad (1.46)$$

Пусть  $S$  — круг радиуса  $\rho$  с центром в точке  $x$ , лежащий в плоскости  $P$ , а  $L$  — граница этого круга:

$$S = \{x \in P : |x| < \rho\}, \quad L = \partial S.$$

Применим систему уравнений Максвелла в интегральной форме (1.44), (1.45) к выбранной области  $S$ , и устремим радиус  $\rho$  круга  $S$  к нулю. В результате получим два равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ \cdot \tau - \mathcal{E}^- \cdot \tau &= 0, & x \in \Sigma, \\ \mathcal{H}^+ \cdot \tau - \mathcal{H}^- \cdot \tau &= 0, & x \in \Sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие (1.46) и известную формулу векторной алгебры

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \mathcal{C} \times \mathcal{A} \cdot \mathcal{B},$$

справедливую для произвольных векторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , получим две цепочки равенств:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \tau &= (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \kappa \times \nu = \\ &= \nu \times (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \kappa = 0, & x \in \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \tau &= (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \kappa \times \nu = \\ &= \nu \times (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \kappa = 0, & x \in \Sigma, \end{aligned}$$

В силу того, что направление касательной  $\tau$  было выбрано произвольно (плоскость  $P$  можно вращать относительно нормали  $\nu$ ), два последних равенства справедливы для произвольного вектора  $\kappa$ , удовлетворяющего условию (1.46). Следовательно, выполняются условия сопряжения (1.40), (1.41).



Сформулируем теперь условия сопряжения, которым должны удовлетворять потенциальные функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ , определяющие амплитуды собственных волн диэлектрического волновода с постоянным показателем преломления. В этом случае поверхность  $\Sigma$  параллельна оси  $0x_3$ . Напомним, что  $\Gamma$  — гладкий контур, ограничивающий область  $\Omega$  на плоскости поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ .

**Утверждение 1.6.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются условия

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty. \quad (1.47)$$

Тогда потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие по формулам (1.30), (1.31) любые ненулевые комплексные амплитуды  $E$  и  $H$  собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (1.2), удовлетворяют условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u^+ &= u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \Gamma, \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma, \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Здесь  $u^+(u^-)$  — предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — производная по внешней нормали к контуру  $\Gamma$ , а  $\partial u / \partial \tau$  — производная по касательной к контуру  $\Gamma$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $E$ ,  $H$  — ненулевые комплексные амплитуды собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (1.2). В рассматриваемом случае вектор нормали  $\nu$  к любой точке  $x \in \Sigma$  перпендикулярен оси  $0x_3$ . Поэтому условия (1.42), (1.43) в координатной форме можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ E_1^+ & E_2^+ & E_3^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ E_1^- & E_2^- & E_3^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma, \quad (1.49)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ H_1^+ & H_2^+ & H_3^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ H_1^- & H_2^- & H_3^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma. \quad (1.50)$$

Следовательно, справедливы следующие условия на поверхности  $\Sigma$ :

$$x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^+ & E_2^+ \end{vmatrix} + E_3^+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \quad (1.51)$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^- & E_2^- \end{vmatrix} + E_3^- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma,$$

$$x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^+ & H_2^+ \end{vmatrix} + H_3^+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \quad (1.52)$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^- & H_2^- \end{vmatrix} + H_3^- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma,$$

Плоскость  $\mathbb{R}^2$  пересекает ось  $0x_3$  в произвольной точке  $x_3$ . Поэтому из условий сопряжения (1.51), (1.52) на поверхности  $\Sigma$  вытекают следующие условия на контуре  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} E_3^+ &= E_3^-, \quad H_3^+ = H_3^-, \quad x \in \Gamma, \\ \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^+ & E_2^+ \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^- & E_2^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Gamma, \\ \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^+ & H_2^+ \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^- & H_2^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.53)$$

При сделанных предположениях, согласно утверждению 1.5, существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , для которых справедливы представления (1.30), (1.31). Следовательно, первые два условия (1.48) вытекают из (1.53) очевидным образом. Проверим справедливость последних двух условий (1.48). Подставим представления (1.30), (1.31) в последние два равенства (1.53) и получим условия относительно функций  $u(x)$  и  $v(x)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left| \mu_0 \omega \frac{\nu_1}{\partial x_2} \frac{\partial v^+}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u^+}{\partial x_1} - \mu_0 \omega \frac{\nu_2}{\partial x_1} \frac{\partial v^+}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u^+}{\partial x_2} \right| = \\ &= \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left| \mu_0 \omega \frac{\nu_1}{\partial x_2} \frac{\partial v^-}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u^-}{\partial x_1} - \mu_0 \omega \frac{\nu_2}{\partial x_1} \frac{\partial v^-}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u^-}{\partial x_2} \right|, \quad x \in \Gamma, \\ & \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left| \beta \frac{\partial v^+}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial x_2} - \beta \frac{\partial v^+}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial x_1} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left| \begin{array}{cc} \nu_1 & \nu_2 \\ \beta \frac{\partial v^-}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial x_2} & \beta \frac{\partial v^-}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial x_1} \end{array} \right|, \quad x \in \Gamma.$$

Из этих условий и равенств

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2, \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \tau_2 = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_1, \quad (1.55)$$

получим последние два из условий сопряжения (1.48).  $\square$

#### § 4. Поведение амплитуд собственных волн на бесконечности

Область  $\Omega_\infty$  является неограниченной; следовательно, для того, чтобы полностью сформулировать задачу о собственных волнах диэлектрического волновода, необходимо задать поведение комплексных амплитуд собственных волн  $E$  и  $H$  на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода  $\mathbb{R}^2$ . Это можно сделать разными способами, что определит разные решения задачи.

Первым классом собственных волн, который был исследован для цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления, были *поверхностные* собственные волны, соответствующие вещественным постоянным распространения (см., напр., [29]). Амплитуды поверхностных собственных волн экспоненциально убывают на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода и, следовательно, принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Соответствующие задачи на собственные значения являются самосопряженными. Позже было установлено [18], что поверхностные собственные волны волноводов кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления могут трансформироваться в *вытекающие собственные волны*, постоянные распространения которых находятся на “нефизическом” листе римановой поверхности квадратного корня. Эта трансформация происходит тогда, когда постоянные распространения мигрируют с вещественной оси “физического” листа на “нефизический” лист вследствие изменений несектральных параметров, то есть геометрических, материальных параметров структуры или частоты электромаг-

нитных колебаний. В [18] было замечено, что вытекающие собственные волны могут быть исследованы как решения более общей спектральной задачи без требования экспоненциального затухания их амплитуд. Более того, было указано, что амплитуды вытекающих собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов экспоненциально возрастают в плоскости поперечного сечения.

Несмотря на то, что постоянные распространения вытекающих собственных волн лежат на листе римановой поверхности, который называется “нефизическим”, они играют очень важную роль с физической точки зрения при рассмотрении задач возбуждения электромагнитных волн. В частности, известно, что электромагнитные поля, которые могут быть возбуждены в диэлектрическом волноводе, имеют представление в виде конечной суммы поверхностных собственных волн, отвечающих вещественным постоянным распространения, лежащим на “физическом” листе, и интеграла от так называемых “волн излучения” (амплитуды которых лишь ограничены на бесконечности, и физический смысл которых до сих пор дискутируется, см., напр., [43], [29], [48]). Хотя вытекающие собственные волны сами не являются частью “правильного” спектрального представления поля, во многих случаях интеграл от волн излучения можно аппроксимировать бесконечной суммой вытекающих волн [50], представляющих ближнее поле возбужденное в цилиндре. Часто сумма вытекающих волн может быть заменена всего одним слагаемым, обеспечивающим простое аналитическое представление поля излучения в ближней зоне. Более того, различные особенности поведения поля излучения в дальней зоне, возбужденного источником в диэлектрическом волноводе конечной длины с вещественным показателем преломления, могут быть интерпретированы в терминах возбуждения вытекающих волн. Вытекающие собственные волны бесконечно длинных волноводов играют важную роль в анализе эффектов излучения и преобразования волн, возникающих в задачах о стыковке и изгибе волноводов, а также в задачах излучения при анизотропии волноводов. Некоторые свойства вытекающих собственных волн диэлектрических волноводов представлены в [29], [18], [31].

В дополнение к теории вытекающих собственных волн в работе [3] было показано, что на “физическом” листе, но вне вещественной оси, также существуют комплексные постоянные распространения собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов круго-

вого поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления. Эти собственные волны получили название *комплексных*. Аналогичные результаты были получены численно для волноводов с произвольным контуром поперечного сечения, показатель преломления которых является непрерывной вещественной функцией во всей плоскости поперечного сечения [40]. Комплексные волны играют важную роль при изучении поведения полей рассеяния в ближней зоне диэлектрических волноводов конечной длины.

Важно отметить, что, как было показано в [3], [40], все известные типы собственных волн могут трансформироваться друг в друга вследствие изменения формы волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, а также частоты электромагнитных колебаний. При этом задачи о поиске комплексных и вытекающих собственных волн, в отличие от задач о поиске поверхностных собственных волн, не являются самосопряженными. Амплитуды вытекающих собственных волн, естественно, не принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , в отличие от амплитуд комплексных и поверхностных волн.

Все это привело к необходимости сформулировать для амплитуд собственных волн произвольного волновода наиболее общие условия излучения, которым удовлетворяли бы все известные решения. Это позволило, в частности, поставить задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в наиболее общем виде. Амплитуды всех известных типов собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода (поверхностных, вытекающих и комплексных) удовлетворяют на бесконечности в плоскости поперечного сечения парциальным условиям излучения. На это было указано в работе А.И. Носича [45], посвященной изучению функций Грина задач о собственных волнах волноводов с компактным поперечным сечением.

Парциальные условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [27], сформулированы и обоснованы им для внешней задачи дифракции на регулярном волноводе в статье [28]. Аналогичные условия применялись для корректной постановки задачи дифракции в работе Х. Рейхарда [47].

Использование парциальных условий излучения в задаче о собственных волнах волновода позволяет рассматривать комплексные постоянные распространения, принадлежащие некоторой римановой поверхности. Для вещественных постоянных распространения, ле-

жащих на главном (“физическом”) листе этой поверхности, такие условия эквивалентны либо классическому условию излучения Зоммерфельда, либо условию экспоненциального затухания на бесконечности. Таким образом, парциальные условия, которые в отличие от условия Зоммерфельда применимы для комплексных постоянных распространения, можно рассматривать как обобщение этого условия. Парциальные условия можно рассматривать и как аналитическое продолжение условия Зоммерфельда по комплексному параметру (постоянной распространения) с части вещественной оси на соответствующую поверхность Римана.

**Определение 1.4.** Обозначим символом  $\Omega_R$  открытый круг радиуса  $R$ :

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\},$$

пусть  $\Gamma_R$  — граница этого круга, а  $R_0$  — положительная константа, такая, что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}$ . Будем говорить, что функции  $E$ ,  $H$ , являющиеся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), удовлетворяют парциальным условиям излучения, если эти функции для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  разлагаются в ряды следующего вида:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (1.56)$$

Здесь  $H_l^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода индекса  $l$  (см., напр., [32]), через  $(r, \varphi)$  обозначены полярные координаты точки  $x$ ,

$$\chi_{\infty} = \sqrt{k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2}.$$

Для функций  $E$ ,  $H$ , являющихся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), ряды (1.56) сходятся абсолютно и равномерно во всякой области вида  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанные ряды можно дифференцировать почленно до любого порядка [4].

Обозначим символом  $\Lambda$  поверхность Римана функции  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ . Будем разыскивать комплексные постоянные распространения  $\beta \in \Lambda$  собственных волн, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.56). Для того, чтобы более детально обсудить эти условия на бесконечности, мы проанализируем строение поверхности Римана  $\Lambda$  и рассмотрим различные типы собственных волн, отвечающие постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на разных листах этой поверхности.

**1. Поверхность Римана  $\Lambda$ .** Для всех целых  $l$  функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  представимы в виде

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r) = c_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r) \ln(\chi_\infty(\beta)r) + R_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r), \quad (1.57)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  — однозначные аналитические функции комплексного аргумента  $\beta$  (см., напр., [32]). Будем рассматривать функции  $H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  как однозначные аналитические функции на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ .

Поверхность Римана  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_\infty$ . В силу того, что функцию

$$\chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$$

саму следует рассматривать как однозначную на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма  $\Lambda_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi_\infty(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}. \quad (1.58)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется “нефизическим” и определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}. \quad (1.59)$$

Все другие пары листов  $\Lambda_{m \neq 0}^{(1),(2)}$  отличаются от  $\Lambda_0^{(1),(2)}$  сдвигом аргумента  $\arg \chi_\infty(\beta)$  на  $2\pi m$  и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} -\pi/2 + 2\pi m &< \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) &\geq 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(1)}; \\ -\pi/2 + 2\pi m &< \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) &< 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранным в соответствии с условием  $\operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , то есть проходящим по мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси. Листы  $\Lambda_{\pm 1}^{(2)}$  соединяются с листом  $\Lambda_0^{(2)}$  вдоль разреза, проходящего по вещественной оси так, что  $|\beta| > kn_\infty$ .

## 2. Поверхностные, комплексные и вытекающие волны.

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ , а листа  $\Lambda_0^{(2)}$  — символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Пусть  $G$  — объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}. \quad (1.61)$$

Символом  $C_0^{(1)}$  обозначим множество

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)}. \quad (1.62)$$

Постоянные распространения  $\beta$  *поверхностных, комплексных и вытекающих* волн принадлежат множествам  $G \subset \Lambda_0^{(1)}$ ,  $C_0^{(1)} \subset \Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$  соответственно.

Функции Ханкеля первого рода имеют следующую асимптотику при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  (см., напр., [32]):

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} \exp \left[ i \left( \chi_\infty r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_\infty r} \right) \right]. \quad (1.63)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) \neq 0$ , и функции  $E$ ,  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, то эти функции удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \exp(i\chi_\infty r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.64)$$

Нетрудно видеть, что для поверхностных и комплексных собственных волн  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) > 0$ . Следовательно, их амплитуды  $E$ ,  $H$  экспоненциально убывают на бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ . Амплитуды  $E$ ,  $H$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ , потому что для них  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) < 0$ .

## 3. Волны излучения.

Обозначим символом  $D$  множество

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\}. \quad (1.65)$$

Спектр *волн излучения* принадлежит области  $D$ , и амплитуды каждой из волн излучения могут быть представлены в виде следующих сумм [43]:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi) +$$



$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} C_l \\ D_l \end{bmatrix} H_l^{(2)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi),$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  и  $H_l^{(2)}$  — функции Ханкеля второго рода индекса  $l$  (см., напр., [32]).

Функции Ханкеля второго рода имеют следующую асимптотику при  $-\pi/2 < \arg \chi_{\infty} < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  (см., напр., [32]):

$$H_l^{(2)}(\chi_{\infty} r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_{\infty} r}} \exp \left[ -i \left( \chi_{\infty} r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_{\infty} r} \right) \right]. \quad (1.66)$$

Нетрудно видеть, что для волн излучения  $\text{Im}(\chi_{\infty}) = 0$ . Таким образом, их амплитуды удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.67)$$

Парциальные условия излучения (1.56) для всех функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (1.16) при всех  $\beta \in D$ , эквивалентны условию излучения Зоммерфельда

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - i\chi_{\infty} \right) \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = o \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.68)$$

Это было доказано в [4]. Там же было доказано, что условие (1.68) является более сильным, чем условие (1.67). Следовательно, амплитуды волн излучения не удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.56). В дальнейшем мы докажем, что область  $D$  не может содержать собственных значений спектральных задач о собственных волнах, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.56).

**4. Другие типы волн.** Из хорошо известного разложения (см., напр., [32]):

$$H_l^{(1)}(\chi_{\infty} \exp(i2\pi m)r) = \alpha_l^{(m)} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) + \gamma_l^{(m)} H_l^{(2)}(\chi_{\infty} r), \quad \alpha_l^{(m)}, \gamma_l^{(m)} \neq 0,$$

справедливого для всех  $m \neq 0$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и

$$\beta \in \bigcup_{m \neq 0} \left( \Lambda_m^{(1)} \cup \Lambda_m^{(2)} \right),$$

а также асимптотик (1.63), (1.66) следует, что постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на листах  $\Lambda_m^{(1)}, \Lambda_m^{(2)}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , отвечают собственные волны, амплитуды которых представляют собой суммы уходящих на бесконечность и приходящих из бесконечности цилиндрических волн.

Распределение постоянных распространения  $\beta \in \Lambda$  имеет симметрию, которая является следствием эквивалентности между положительным и отрицательным направлениями распространения собственных волн вдоль продольной оси  $Ox_3$ , а также положительным и отрицательным направлениями времени  $t$  (см., напр., [45]). А именно, если  $\beta$  — положительная постоянная распространения, и  $E, H$  — амплитуды векторов электрической и магнитной напряженности соответствующей собственной волны, то  $-\beta$  также является постоянной распространения собственной волны с амплитудами  $-E, H$ . Далее, в силу того, что  $\text{Im } \omega = 0$  и  $\text{Im } n = 0$ , комплексно-сопряженные числа  $\pm \bar{\beta}$  также являются постоянными распространения собственных волн с амплитудами  $[\mp \bar{E}, -\bar{H}]$ . Все эти факты могут быть легко проверены непосредственной подстановкой в дифференциальные уравнения (1.3), условия сопряжения (1.42), (1.43) и условия на бесконечности (1.56). Все упомянутые собственные волны называют *прямыми, обратными, сопряженными и обратно-сопряженными* волнами соответственно (см. [45]).

## § 5. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода

Сконструируем теперь уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн в приближении слабонаправляющего волновода [29], [6], которое широко применяется для исследования цилиндрических диэлектрических волноводов со слабо меняющимся в плоскости поперечного сечения показателем преломления.

**1. Представления для комплексных амплитуд собственных волн.** В случае волновода со слабо меняющимся показателем преломления  $n$  удобно воспользоваться выражением компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.69)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0 \omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\omega \beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.70)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0 \omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\omega \beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.71)$$

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.72)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость. Эти представления легко получить из системы уравнений (1.3). Действительно, запишем уравнения (1.3) в декартовой системе координат в скалярном виде (1.35) – (1.37). Представление (1.69) непосредственно следует из второго уравнения в (1.37). Подставим представление (1.69) во второе уравнение из (1.35) и второе уравнение из (1.36). Получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\omega \mu_0}{\beta} H_2 + \frac{1}{i\beta} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\omega \mu_0}{\beta} H_2 - \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{\omega \mu_0}{\beta} H_1 + \frac{1}{i\beta} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{\omega \mu_0}{\beta} H_1 - \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливы представления (1.70) и (1.71). Подставим теперь полученные выражения (1.70) и (1.71) для составляющих  $E_1$  и  $E_2$  в первое уравнение из (1.36). В результате получим

$$\begin{aligned} H_3 &= -\frac{1}{i\omega \mu_0} \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) = \\ &= \frac{1}{i\omega \mu_0} \left\{ -\frac{\omega \mu_0}{\beta} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{i\omega \mu_0} \left\{ -\frac{\omega \mu_0}{\beta} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right] \right\} = \\ &= -\frac{1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо представление (1.72).

**2. Дифференциальные уравнения для  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ .** Из системы уравнений (1.3) вытекает, что составляющие  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{H}_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right), \quad (1.73)$$

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{H}_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right). \quad (1.74)$$

Проверим сначала справедливость уравнения (1.74). Для этого подставим во второе уравнение из (1.35) полученные выражения (1.70) и (1.72) для компонент  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_3$ . В результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{1}{i\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_2} \right) \right) - i\beta \mathbf{H}_2 = \\ & = -i\omega \varepsilon \left( \frac{\omega \mu_0}{\beta} \mathbf{H}_2 - \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Отсюда, после дифференцирования, получим равенство:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i\beta} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial x_2^2} \right) - i\beta \mathbf{H}_2 = \\ & = -i\omega \varepsilon \frac{\omega \mu_0}{\beta} \mathbf{H}_2 + i\omega \varepsilon \frac{1}{\beta \omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right) + \\ & \quad + i\omega \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части последнего равенства на  $i\beta$  и получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial x_2^2} + \beta^2 \mathbf{H}_2 = \\ & = k^2 n^2 \mathbf{H}_2 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

Отсюда и из очевидного тождества

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}$$

следует, что уравнение (1.74) имеет место. Аналогичным образом, если подставить во второе уравнение из (1.36) выражения (1.71) и (1.72) для компонент  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{H}_3$ , можно получить уравнение (1.73).

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правыми частями в системе (1.73), (1.74) можно пренебречь ([29], [6]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.75)$$

**3. Условия сопряжения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Построим теперь, следуя [29], [6], условия, которым в приближении слабонаправляющего волновода должны удовлетворять функции  $H_1$ ,  $H_2$  на контуре  $\Gamma$ . Из условий сопряжения (1.42), (1.43) на границе  $\Gamma$  для касательных составляющих векторов комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  вытекают следующие условия сопряжения для компонент  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma, \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu} = -\nu_1 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma. \quad (1.78)$$

Условия (1.76) непосредственно следуют из третьего условия сопряжения в (1.53). Проверим справедливость условия (1.77). Согласно определению производной по нормали имеем

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} \nu_2.$$

Прибавим и вычтем из правой части последнего равенства слагаемое

$$\frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \\ &\quad - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2 - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2. \end{aligned}$$

Из условия сопряжения (1.42) и представления (1.69) следует, что

$$\frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right).$$

Объединим два последних равенства и получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2 - \\ &\quad - \nu_2 \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Прибавим и вычтем из его правой части слагаемое

$$\frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \nu_2.$$

Учтем, что  $\nu_1 = \tau_2$ ,  $\nu_2 = -\tau_1$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \tau_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \tau_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \tau_1 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \tau_1 + \\ &\quad + \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Из второго условия сопряжения (1.53) и представления (1.72) следует, что

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} = \frac{\partial H_2^-}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_2}.$$

Из двух последних равенств получим следующее условие на контуре  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_2^-}{\partial x_2} \tau_2 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_2} \tau_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \tau_1 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \tau_1 + \\ &\quad + \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Запишем это условие, используя определение производной по касательной (1.55):

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \tau} - \frac{\partial H_2^+}{\partial \tau} + \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right).$$

Так как справедливо условие (1.76), то есть предельные значения функции  $H_1$  изнутри и извне контура  $\Gamma$  совпадают, то предельные значения производной этой функции по касательной к контуру  $\Gamma$  также совпадают:

$$\frac{\partial H_2^-}{\partial \tau} = \frac{\partial H_2^+}{\partial \tau}.$$

Из двух последних равенств следует условие сопряжения (1.77). Аналогичным образом можно убедиться в справедливости условия сопряжения (1.78).

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правые части в граничных условиях (1.77), (1.78) можно считать равными нулю (см., напр., [29], [6]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одним и тем же условиям сопряжения на контуре  $\Gamma$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (1.80)$$

**4. Условия излучения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Согласно результатам параграфа 4, функции  $H_1$  и  $H_2$  на бесконечности должны удовлетворять парциальным условиям излучения, а именно, для всех достаточно больших  $x$ ,  $|x| \geq R_0$ , они должны разлагаться в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} B_{1,l} \\ B_{2,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (1.81)$$

Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельмгольца (1.75), одинаковым условиям сопряжения (1.79), (1.80) и одинаковым условиям излучения (1.81) на бесконечности. Следовательно, в рассматриваемом приближении  $H_1$  и  $H_2$  являются решениями одной и той же задачи.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что скалярное приближение слабонаправляющего волновода заключается в том, что вместо того, чтобы разыскивать векторы комплексных амплитуд  $E$  и  $H$ , ищется лишь одна скалярная функция  $u = H_1 = H_2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.82)$$

$$u^+ = u^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (1.84)$$

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (1.85)$$

Остальные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются затем по формулам (1.69) – (1.72).

## § 6. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения

Рассмотрим частный случай диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с функцией  $n$ , принимающей постоянные значения внутри волновода и в окружающей среде. В этом случае исходные спектральные задачи (в полной электродинамической постановке и в приближении слабонаправляющего волновода) методом разделения переменных сводятся к семействам трансцендентных уравнений относительно  $\omega$  и  $\beta$  (см., напр., [29]).

**1. Векторная задача в полной электродинамической постановке.** Пусть  $R$  — радиус волновода,  $n_{\infty} > 0$  — показатель преломления окружающей среды и  $n_+ > n_{\infty}$  — показатель преломления волновода. Как было доказано в утверждении 1.5, для любой собственной волны существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие ее амплитуду. Потенциальные функции удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| > R.$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ . Применим для решения этих уравнений метод разделения переменных. Получим разложения

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} c_l \\ d_l \end{bmatrix} J_l(\chi_+ r) \exp(il\varphi), \quad |x| < R, \quad (1.86)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad |x| > R. \quad (1.87)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ ;  $J_n(\chi_+ r)$  — функции Бесселя порядка  $l$  [32]. В этих разложениях учтено, что искомые функции не должны иметь



особенностей, и на бесконечности они удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.56).

Из разложений (1.86), (1.87) и условий сопряжения (1.48) придем к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_l, b_l, c_l, d_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Коэффициенты матрицы этой системы нелинейно зависят от  $\omega$  и  $\beta$ . Матрица имеет такую блочно-диагональную структуру, что исходная система распадается на бесконечное количество независимых систем из четырех уравнений. Если при некоторых  $\omega$  и  $\beta$  определитель какой-либо из этих систем обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение, определяющее собственную волну волновода. Из условия равенства нулю соответствующих определителей придем к семейству трансцендентных уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \left( n_+^2 \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + n_\infty^2 \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) \times \\ & \times \left( \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) = \\ & = \left( \frac{\beta k (n_+^2 - n_\infty^2) l}{\chi_\infty \chi_+ R^2} \right)^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.88)$$

Эти уравнения в теории волноводов носят название характеристических. Качественные свойства спектра могут быть изучены в данном случае на основе анализа характеристических уравнений методами теории функций комплексного переменного с использованием свойств функций Бесселя и Ханкеля.

Важные результаты относительно качественных свойств спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения были получены в [18] и [3]. В этих статьях было доказано что при  $\omega > 0$  у волноводов кругового сечения наряду с хорошо известными поверхностными собственными волнами (см., напр., [29]), отвечающими  $\beta \in G$ , существуют комплексные собственные волны [3], постоянные распространения  $\beta$  которых принадлежат  $C_0^{(1)}$ , и вытекающие собственные волны [18] с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ .

На рисунке 2 показаны дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения — графики функций  $\beta = \beta(k)$ , где  $k > 0$ ,

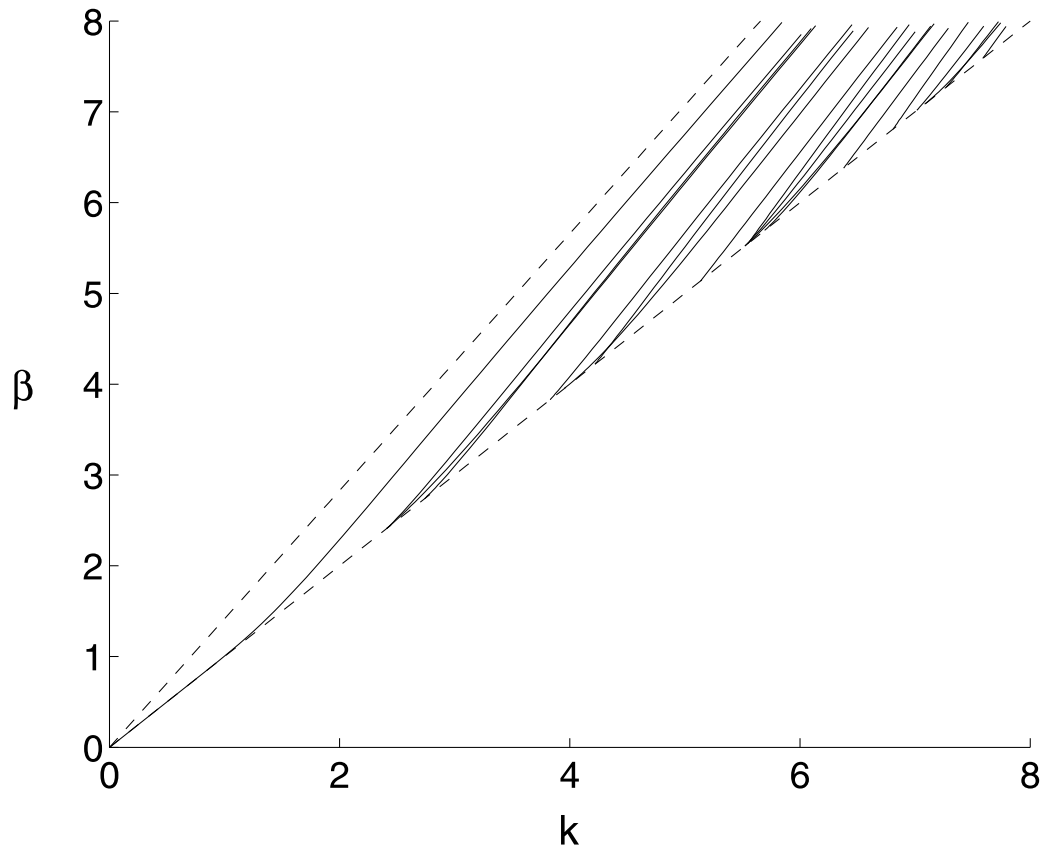


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения

а постоянные распространения  $\beta$  при каждом фиксированном  $k$  принадлежат интервалу  $G$ . Графики построены на основе поиска корней характеристических уравнений (1.88). Расчеты проведены для волновода единичного радиуса с показателем преломления  $n_+ = \sqrt{2}$ , находящегося в однородной окружающей среде с показателем преломления  $n_\infty = 1$ . Пунктирными линиями показаны границы области  $\{(k, \beta) : k > 0, \beta \in G\}$ .

Для любого сколь угодно малого значения  $k > 0$  существуют, по крайней мере, два линейно независимых решения задачи. Соответствующие собственные волны называются фундаментальными, или основными. Дисперсионная кривая для основных собственных волн кругового волновода одна, так как они для такого волновода являются вырожденными — одному значению постоянной распространения  $\beta$  соответствуют две волны с линейно независимыми амплитудами. При любом  $k > 0$  число решений задачи конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$  называются критическими частотами, а со-

ответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки. Это точки, в которых начинаются дисперсионные кривые для не основных собственных волн. Дисперсионные кривые при  $k \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $\beta/k \rightarrow n_+$  при  $k \rightarrow \infty$ .

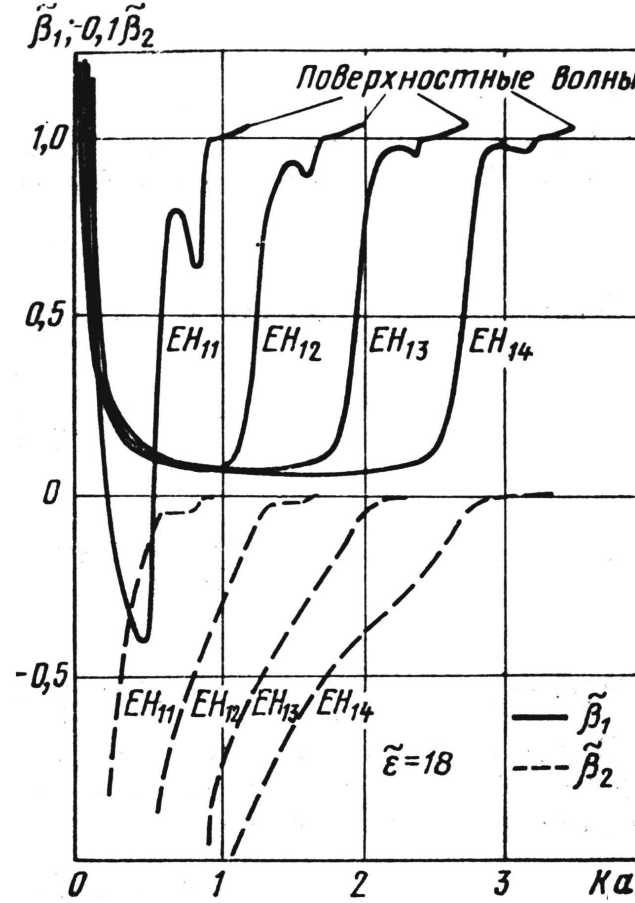


Рис. 3. Дисперсионные кривые для вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь  $\tilde{\beta} = \beta/(kn_\infty)$ ,  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 + i\tilde{\beta}_2$ ,  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $a$  — радиус волновода

На рисунке 3 (заимствованным из статьи [3]) построены дисперсионные кривые для вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения радиуса  $a$  — графики вещественных и мнимых частей функций  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(ka)$ , где  $\tilde{\beta} = \beta/(kn_\infty)$ . С уменьшением частоты колебаний  $\omega$ , при переходе через точки отсечки, поверхностные волны трансформируются в вытекающие с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ . В рассмотренном случае при относительной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_+/\epsilon_\infty = 18$  в ходе дальнейшего уменьшения  $\omega$  собственная волна  $EH_{11}$  трансформируется в комплексную, постоянная распространения  $\beta$  кото-

рой принадлежит  $C_0^{(1)}$ . Чем больше значение  $\tilde{\varepsilon}$ , тем большее количество вытекающих собственных волн преобразуются в комплексные с уменьшением  $\omega$ . Так, например, при  $\tilde{\varepsilon} > 50$  таких волн уже две:  $EH_{11}$  и  $EH_{12}$ , и так далее [3].

**2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим теперь задачу для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$ , настолько мало отличающимся от показателя преломления окружающей среды  $n_\infty < n_+$ , что может быть применено приближение слабонаправляющего волновода. Как было показано в параграфе 5, в этом случае необходимо определить функцию  $u = H_1 = H_2$ , удовлетворяющую внутри круга и вне его уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| > R,$$

а на границе раздела сред условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial r} = \frac{\partial u^-}{\partial r}, \quad |x| = R.$$

Потребуем от функции  $u(x)$ , чтобы она удовлетворяла на бесконечности парциальным условиям излучения (1.85).

Поставленная задача может быть решена методом разделения переменных аналогично векторной задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. В результате получим семейство характеристических уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\chi_+ \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} = \chi_\infty \frac{H'_l{}^{(1)}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.89)$$

Подробное изложение свойств различных типов собственных волн, отвечающих различным значениям  $\beta$ , можно найти, например, в книге [29]. Уравнение (1.89) имеет решения  $\beta$ , лежащие в области  $G$  “физического” листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ , которым отвечают поверхностные собственные волны и решения  $\beta$ , лежащие на “нефизическом” листе  $\Lambda_0^{(2)}$ , которым отвечают вытекающие собственные волны. Однако, как показано в [29], уравнение (1.89) в отличие от уравнения (1.88) не имеет решений  $\beta$ , лежащих на “физическом”

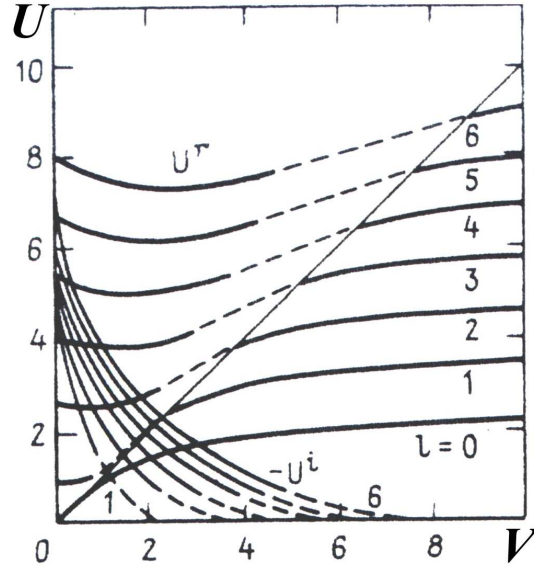


Рис. 4. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ ,  $U = kR\sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ ,  $U = U^r + iU^i$

листе  $\Lambda_0^{(1)}$  вне вещественной оси. Другими словами, у слабонаправляющих волноводов кругового поперечного сечения не существует комплексных собственных волн.

На рисунке 4 (заимствованном из книги [29]) показаны дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения — графики функций  $U = U(V)$ , где  $U = kR\sqrt{\varepsilon_+ - (\beta/k)^2}$ ,  $V = kR\sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн лежат на рисунке правее прямой  $U = V$ , графики вещественных частей функции  $U = U(V)$  для вытекающих волн — левее этой прямой.

Для любого сколь угодно малого значения  $k > 0$  существует, по крайней мере, одна поверхностная собственная волна. Она называется основной. При любом  $k > 0$  число поверхностных собственных волн конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн при  $V \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $U \rightarrow \text{const}$  при  $V \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$  называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки. В точках отсечки  $U = V$ . Это точки, в которых дисперсионные кривые поверхностных собственных волн с

уменьшением  $\omega$  трансформируются в кривые вытекающих собственных волн. При любом  $k > 0$  число вытекающих собственных волн бесконечно.

### Задачи и упражнения

1. Проверьте справедливость формул:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) &= \Delta u - \beta^2 u, \\ \operatorname{div}_\beta (\operatorname{rot}_\beta F) &= 0, \\ \operatorname{div}_\beta (uF) &= u \operatorname{div}_\beta F + F \cdot \operatorname{grad} u, \\ \operatorname{rot}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) &= 0, \\ \operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta F) &= -\Delta F + \beta^2 F + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta F), \\ \Delta (\operatorname{div}_\beta F) &= \operatorname{div}_\beta (\Delta F).\end{aligned}$$

2. Напишите компьютерную программу, предназначенную для вычисления корней уравнений (1.88). Постройте графики, изображенные на рисунках 2 и 3.

3. Напишите компьютерную программу, предназначенную для вычисления корней уравнений (1.89). Постройте графики, изображенные на рисунке 4.

4. *Задача о собственных волнах металлического волновода кругового поперечного сечения [26].* Собственные волны металлического волновода распадаются на  $E$  и  $H$ -поляризованные волны.  $E$ -волны (“электрические”) — другое название  $TM$ -волны (“поперечно-магнитные”) — лишены продольной магнитной компоненты ( $H_z = 0$ ).  $H$ -волны (“магнитные”) — другое название  $TE$ -волны (“поперечно-электрические”) — лишены продольной электрической компоненты ( $E_z = 0$ )

Задача о  $E$ -волнах заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им нетривиальных решений  $u = E_z$  уравнения

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| < R, \quad (1.90)$$

удовлетворяющих граничному условию

$$u = 0, \quad |x| = R.$$

Задача о  $H$ -волнах заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им нетривиальных решений  $u = H_z$  уравне-

ния (1.90), удовлетворяющих граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad |x| = R.$$

Получите характеристические уравнения для определения постоянных распространения собственных волн металлического волновода кругового поперечного сечения в случаях  $E$  и  $H$  поляризации поля. Напишите компьютерную программу, предназначенную для вычисления корней этих уравнений. Постройте дисперсионные кривые аналогичные изображенным на рисунке 2.

5. *Задача о собственных волнах металлического волновода прямоугольного поперечного сечения [26].* Задача о  $E$ -волнах заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им нетривиальных решений  $u = E_z$  уравнения

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \quad (1.91)$$

удовлетворяющих граничному условию

$$u = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = b.$$

Задача о  $H$ -волнах заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им нетривиальных решений  $u = H_z$  уравнения (1.90), удовлетворяющих граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = b.$$

Получите характеристические уравнения для определения постоянных распространения собственных волн металлического волновода прямоугольного поперечного сечения в случаях  $E$  и  $H$  поляризации поля. Получите явный вид корней этих уравнений. Постройте дисперсионные кривые, аналогичные изображенным на рисунке 2.

---

---

## ГЛАВА 2

# ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С ПОСТОЯННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

### § 1. Элементы спектральной теории оператор-функций

Дадим ряд определений и сформулируем необходимые нам результаты спектральной теории оператор-функций, изложенные в [9], [51]. Пусть  $\Lambda$  — открытая связная область комплексной плоскости  $\beta$ . Оператор-функцией на банаховом пространстве  $U$  называется функция  $A(\beta)$ , значениями которой являются линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства  $U$  в банахово пространство  $V$ , определенные при каждом  $\beta \in \Lambda$ .

Оператор-функция  $A(\beta)$  называется голоморфной в точке  $\beta_0 \in \Lambda$ , если существует такое  $p > 0$ , что при любом  $\beta$ ,  $|\beta - \beta_0| < p$ , оператор  $A(\beta)$  допускает разложение в сходящийся по норме операторов ряд

$$A(\beta) = A(\beta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta - \beta_0)^m A_m.$$

Обозначим  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : V \rightarrow U\}$  множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$  — множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$  (это множество называют также характеристическим).

Линейный оператор  $A$  называется фредгольмовым, если он нормально разрешим и его индекс равен нулю, в частности, если он представим в виде суммы двух операторов, один из которых непрерывно обратим, а второй вполне непрерывен.

Ненулевая функция  $u \in U$  называется собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если

$$A(\beta)u = 0. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая теорема [9].



**Теорема 2.1.** Пусть выполнены следующие условия.

1.  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости,  $A(\beta)$  — голоморфная на  $\Lambda$  оператор-функция.
2. При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.
3. Множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Тогда множество  $\sigma(A)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ .

Пусть  $A(\beta, \omega)$  — оператор-функция двух параметров: комплексного параметра  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega \in \mathbb{R}$ , где  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел. Исследование зависимости характеристических значений  $\beta$  от несектрального параметра  $\omega$  может быть проведено с помощью следующей теоремы [51].

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены следующие условия.

1.  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости. При каждом фиксированном  $\omega \in \mathbb{R}$  оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  непрерывна по  $(\beta, \omega) \in \Lambda \times \mathbb{R}$ .
2. При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega \in \mathbb{R}$  оператор  $A(\beta, \omega)$  представим в виде  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $I$  — единичный, а  $B(\beta, \omega)$  — вполне непрерывный оператор.
3. Для любого  $\omega \in \mathbb{R}$  множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Тогда каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega \in \mathbb{R}$ . Кроме того, с изменением параметра  $\omega \in \mathbb{R}$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе области  $\Lambda$ .

Отметим, что эти утверждения носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

Таким образом, схема применения теорем 2.1 и 2.2 к изучению конкретной спектральной задачи может состоять из следующих этапов.

1. Дать корректное и наиболее общее определение ее решения.
2. Эквивалентным образом (например, используя технику интегральных уравнений) свести ее к задаче для некоторой оператор-функции.
3. Исследовать такие свойства этой оператор-функции, как голоморфность по спектральному параметру, непрерывность как функции спектрального и неспектральных параметров, фредгольмовость при фиксированных значениях параметров.
4. Доказать, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярное множество этой оператор-функции не пусто. Для этого нужно исследовать локализацию собственных значений исходной спектральной задачи и воспользоваться эквивалентностью этой задачи и задачи для оператор-функции.

## § 2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ . Показатель преломления  $n$  является кусочно-постоянной функцией, а именно, в области  $\Omega$  равен константе  $n_+$ , а в области  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  — константе  $n_\infty$ ,  $0 < n_\infty < n_+$ . Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. § 5 главы 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2.3)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}, \quad \chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2},$$

$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ;  $u^+(u^-)$  — предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ;  $\partial u / \partial \nu$  — производная по нормали к контуру  $\Gamma$ , внешней относительно области  $\Omega$ .

Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения (1.85), то есть при  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad (2.5)$$

где  $x_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $x_2 = r \sin(\varphi)$ ,  $H_l^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ .

Будем разыскивать нетривиальные решения  $u(x)$  задачи (2.2) – (2.5) в классе функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Обозначим это множество функций через  $U$ .

Будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  — пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$  соответственно:

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_\infty. \quad (2.6)$$

Строение поверхности  $\Lambda_\infty$  подробно рассмотрено в главе 1 (там она была обозначена  $\Lambda$ ). Поверхность  $\Lambda_+$  устроена аналогично. Пусть

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{+0}^{(1)} \cap \Lambda_{\infty 0}^{(1)}$$

— пересечение главных (“физических”) листов этих поверхностей, определяемых условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi_+(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_+(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{+0}^{(1)}, \quad (2.7)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{\infty 0}^{(1)}. \quad (2.8)$$

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Пусть  $G$  — объединение двух интервалов оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим множества

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\},$$

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)},$$

$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_+ \right\}.$$

**Определение 2.5.** Ненулевую функцию  $u \in U$  будем называть собственной функцией задачи (2.2) – (2.5), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.2) – (2.5).

**Теорема 2.3.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (2.2) – (2.5) могут лежать лишь в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество  $\Lambda_0^{(1)}$  является объединением четырех множеств:

$$\Lambda_0^{(1)} = C_0^{(1)} \cup D \cup G \cup B.$$

Докажем, что множества  $C_0^{(1)}$ ,  $D$  и  $B$  не содержат собственных значений задачи (2.2) – (2.5).

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (2.2) – (2.5), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$  к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  (здесь  $\bar{u}$  означает функцию комплексно-сопряженную с  $u$ ) формулу Грина. Получим равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx &= \int_{\Gamma} \left( u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} - \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) dl, \\ \int_{\Omega_R \setminus \bar{\Omega}} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx &= - \int_{\Gamma} \left( u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} - \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) dl + \\ &+ \int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl. \end{aligned}$$

При  $\beta \in D$  коэффициенты в уравнениях Гельмгольца (2.2), (2.3) — положительные вещественные числа, следовательно, левые части в двух последних равенствах обращаются в нуль. Сложим левые и правые части этих равенств и используем условия сопряжения (2.4). Получим

$$\int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (2.5) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(2)'}(\chi_{\infty} R) - H_l^{(2)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'}(\chi_{\infty} R) \right] |a_l|^2 = 0.$$

Хорошо известно (см., напр., [32]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно

$$H_l^{(1)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(2)'}(\chi_{\infty} R) - H_l^{(2)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'}(\chi_{\infty} R) = \frac{4}{i\pi\chi_{\infty} R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (2.5) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Функция  $u$  удовлетворяет в области  $\Omega_{\infty}$  уравнению Гельмгольца (2.3) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_{\infty}$ . Таким образом,  $u = 0$  при  $x \in \Omega_{\infty}$  и  $u^+ = 0$ ,  $\partial u^+ / \partial \nu = 0$  на контуре  $\Gamma$ .

Применим в области  $\Omega$  третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (2.2) в  $\Omega$  через предельное значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma$ :

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_+(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.9)$$

где

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|)$$

– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (2.2). Из этого представления функции  $u(x)$  и условий сопряжения (2.4) следует что  $u = 0$  и в области  $\Omega$ . Итак, мы доказали, что при  $\beta \in D$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (2.2) – (2.5). Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (2.2) – (2.5).

Предположим теперь, что  $u$  – собственная функция задачи (2.2) – (2.5), отвечающая собственному значению  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R \setminus \overline{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина. Получим равенства:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} dl,$$

$$\int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega}} \bar{u} \Delta u dx = - \int_{\Gamma} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} dl + \int_{\Gamma_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl,$$

где

$$\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)^T.$$

Сложим левые и правые части этих равенств, учитывая условия сопряжения (2.4), и устремим  $R$  к бесконечности. При этом надо заметить, что согласно асимптотике (1.63), с. 24, все подынтегральные выражения во втором равенстве, зависящие от  $R$ , экспоненциально убывают на бесконечности при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . В результате получим уравнение

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (2.10)$$

При вещественных  $\beta$ , лежащих в бесконечном интервале  $B$ , равенству (2.10) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$  в силу того, что

$$\beta^2 - k^2 n^2 > 0$$

при  $\beta \in B$  и  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Возьмем от левой и правой частей равенства (2.10) мнимую часть. Получим

$$\operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |u|^2 dx = 2 \operatorname{Re}(\beta) \operatorname{Im}(\beta) \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |u|^2 dx = 0.$$

Заметим, что ни мнимая, ни вещественная части числа  $\beta \in C_0^{(1)}$  не обращаются в нуль, следовательно, при  $\beta \in C_0^{(1)}$  последнему равенству также удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ .

Таким образом, мы доказали, что при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (2.2) – (2.5). Следовательно, области  $B$  и  $C_0^{(1)}$  также свободны от собственных значений задачи (2.2) – (2.5).  $\square$

Отметим, что доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.2) – (2.5) в области  $G$  с помощью равенства (2.10) нельзя в силу того, что

$$\beta^2 - k^2 n^2 < 0$$

при  $\beta \in G$  и  $x \in \Omega_+$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны (и экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$ ). Теорема 2.3 обобщает результаты [29] о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. пункт 2 параграфа 6 главы 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабосингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем теперь исходную задачу (2.2) – (2.5) методами теории потенциалов к спектральной задаче для некоторой интегральной оператор-функции. Большинство результатов теории потенциалов, которые мы будем использовать, являются классическими и хорошо известны. Их доказательства можно найти, например, в монографиях [1], [19]. Возможно, менее традиционно изучение поведения потенциалов на бесконечности, как функций удовлетворяющих парциальным условиям излучения. Аналогичные построения содержатся в книгах [13], [49].

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.11)$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|). \quad (2.12)$$

Здесь

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$\chi_+(\beta) = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}, \quad \chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2},$$

параметр  $\beta$  предполагается комплексным, принадлежащим множеству  $\Lambda$ , определенному формулой (2.6). Напомним [32], что

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$

где  $J_0(z)$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $N_0(z)$  — функция Неймана нулевого порядка,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2},$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Psi(k+1)}{(k!)^2},$$

$$\Psi(n+1) = -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \Psi(1) = -C,$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156649 \dots,$$

где  $\Psi$  — пси-функция,  $C$  — константа Эйлера.

Функции (2.11), (2.12) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \Phi_+(\beta; x, y) + \chi_+^2(\beta) \Phi_+(\beta; x, y) = 0, \quad (2.13)$$

$$\Delta \Phi_\infty(\beta; x, y) + \chi_\infty^2(\beta) \Phi_\infty(\beta; x, y) = 0 \quad (2.14)$$

как функции переменной  $x$  при любом фиксированном значении параметра  $y \neq x$ . При  $y = x$  они имеют логарифмическую особенность. Функции (2.11) и (2.12) являются фундаментальными решениями уравнений (2.13) и (2.14).

С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [25], с. 201) легко показать, что функция  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  при любых  $\beta \in \Lambda$  и  $y \in \mathbb{R}^2$  удовлетворяет условию (2.5):

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|) = \quad (2.15)$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_\infty r(y)) \exp(-il\varphi(y)) H_l^{(1)}(\chi_\infty r(x)) \exp(il\varphi(x)),$$

где  $r(x)$ ,  $\varphi(x)$  — полярные координаты точки  $x$ . Аналогичному условию удовлетворяет функция  $\Phi_+(\beta; x, y)$ :

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|) = \quad (2.16)$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_+ r(y)) \exp(-il\varphi(y)) H_l^{(1)}(\chi_+ r(x)) \exp(il\varphi(x)).$$

Отметим, что другая пара фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (2.13) и (2.14), а именно функции

$$\Phi_+^{(2)}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.17)$$

$$\Phi_\infty^{(2)}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|), \quad (2.18)$$



где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, парциальным условиям излучения (2.15), (2.16) не удовлетворяют.

Будем обозначать  $C^{0,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  пространство непрерывных по Гельдеру функций, то есть линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\Gamma$  и удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha,$$

где  $K$  — положительная постоянная, зависящая от  $f$ , но не зависящая от  $x$  и  $y$ . Будем обозначать  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций — линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\Gamma$ , таких, что их первые производные существуют и принадлежат  $C^{0,\alpha}$ . Как известно, пространство непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$  и пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций  $C^{1,\alpha}$  являются банаховыми пространствами с нормами

$$\|f\|_\alpha = \max_{x \in \Gamma} |f(x)| + \sup_{x, y \in \Gamma, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

и

$$\|f\|_{1,\alpha} = \max_{x \in \Gamma} |f(x)| + \max_{x \in \Gamma} |f'(x)| + \sup_{x, y \in \Gamma, x \neq y} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

соответственно. Будем предполагать, что контур  $\Gamma$  задан параметрически функцией  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Функции из  $C^{0,\alpha}$  и  $C^{1,\alpha}$  будем рассматривать также, как непрерывные по Гельдеру и непрерывно дифференцируемые по Гельдеру  $2\pi$ -периодические функции параметра  $t$ .

Решения задачи (2.2) – (2.5) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.19)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Omega_\infty \quad (2.20)$$

с плотностями  $f_+$  и  $f_\infty$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$ .

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_\infty \in C^{0,\alpha}$  функция  $u$ , задаваемая равенствами (2.19), (2.20), удовлетворяет требуемым свойствам гладкости и уравнениям (2.2), (2.3). С помощью разложения (2.15) нетрудно убедиться, что функция  $u$  удовлетворяет условию (2.5). А именно, при  $|x| \geq R_0$  функция  $u$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r(x)) \exp(il\varphi(x)),$$

где

$$a_l = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} J_l(\chi_\infty r(y)) \exp(-il\varphi(y)) f_\infty(y) dl(y).$$

Используем граничные условия (2.4) и предельные свойства потенциалов простого слоя и их нормальных производных. Получим нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений

$$\mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ + \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_\infty = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{A}^{(2,1)}(\beta) f_+ + \mathcal{A}^{(2,2)}(\beta) f_\infty = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.22)$$

Здесь

$$\left( \mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ \right)(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_\infty \right)(x) = - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,1)}(\beta) f_+ \right)(x) = \frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,2)}(\beta) f_\infty \right)(x) = \frac{1}{2} f_\infty(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma.$$

Перейдем к переменной интегрирования  $t$  параметрического определения контура  $\Gamma$ , выделим явно логарифмическую особенность ядер  $\Phi_+(x, y)$ ,  $\Phi_\infty(x, y)$  и преобразуем систему (2.21), (2.22) к виду

$$Lp^{(1)} + B^{(1,1)}(\beta)p^{(1)} + B^{(1,2)}(\beta)p^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.23)$$

$$p^{(2)} + B^{(2,1)}(\beta)p^{(1)} + B^{(2,2)}(\beta)p^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.24)$$

Здесь

$$p^{(1)}(\tau) = (f_+(y) - f_\infty(y)) |r'(\tau)|, \quad p^{(2)}(\tau) = f_+(y) + f_\infty(y),$$

$$Lp^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p^{(1)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$B^{(i,j)}(\beta) p^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(i,j)}(\beta; t, \tau) p^{(j)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$h^{(1,1)}(\beta; t, \tau) = 2\pi \left( G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) + G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) \right),$$

$$h^{(1,2)}(\beta; t, \tau) = 2\pi \left( G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) - G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) \right) |r'(\tau)|,$$

$$h^{(2,1)}(\beta; t, \tau) = 4\pi \left( G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) + G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) \right),$$

$$h^{(2,2)}(\beta; t, \tau) = 4\pi \left( G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) - G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) \right) |r'(\tau)|,$$

$$G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) = \Phi_+(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) = \Phi_\infty(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) = \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) = \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau).$$

Известно (см., напр., [7], с. 10), что линейный непрерывный оператор  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  непрерывно обратим. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$B^{(2,1)}(\beta), \quad B^{(2,2)}(\beta) : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha},$$

$$B^{(1,1)}(\beta), \quad B^{(1,2)}(\beta) : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $G^{(2,1)}$ ,  $G^{(2,2)}$  не имеют особенности при  $t = \tau$ , а ядра  $G^{(1,1)}$ ,  $G^{(1,2)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Аналогичные результаты получены, например, в [20], с. 93, [42], с. 211.

Таким образом, система (2.23), (2.24) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.25)$$

где

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$w^{(1)} = Lp^{(1)} \in C^{1,\alpha}, \quad w^{(2)} = p^{(2)} \in C^{0,\alpha};$$

вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве

$$W = C^{1,\alpha} \times C^{0,\alpha},$$

определяется при помощи равенства

$$Bw = \begin{bmatrix} B^{(1,1)}L^{-1} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)}L^{-1} & B^{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Символом  $I$  обозначен единичный оператор в  $W$ .

**Теорема 2.4.** *Положим  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . При каждом фиксированном*

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

*оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу полной непрерывности оператора  $B(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  при любом  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$  оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  фредгольмов. Используя известные свойства функций Ханкеля (см., напр., [25]), нетрудно убедиться в том, что для каждой точки  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  функции  $h^{(i,j)}(\beta; \omega, n_+, n_\infty; t, \tau)$  аналитические по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывны по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ . Отсюда следует (см. [13], с. 71), что при каждом фиксированном значении  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .  $\square$

Таким образом, задача (2.25) является нелинейной спектральной задачей для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

**Определение 2.6.** Ненулевую функцию  $w \in W$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение (2.25). Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $W$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : W \rightarrow W\}$  множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Исследуем теперь эквивалентность задач (2.2) – (2.5) и (2.25).

**Теорема 2.5.** Если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функция  $u$ , определяемая равенствами (2.19), (2.20), где  $\beta = \beta_0$ ,

$$f_+ = w^{(2)}/2 + L^{-1}w^{(1)}/(2|r'|), \quad (2.27)$$

$$f_\infty = w^{(2)}/2 - L^{-1}w^{(1)}/(2|r'|), \quad (2.28)$$

принадлежит множеству  $U$  и является собственной функцией задачи (2.2) – (2.5), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ . Любая собственная функция  $u \in U$  задачи (2.2) – (2.5), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя (2.19), (2.20) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$  соответственно. При этом функция

$$w = (L[(f_+ - f_\infty)|r'|], f_+ + f_\infty) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

В связи с тем, что доказательство этой теоремы достаточно объемно [15], ограничимся изложением его краткой схемы. Идея доказательства первого утверждения теоремы 2.5 базируется на результате [30] о том, что если потенциал простого слоя равен нулю, то его плотность также равна нулю. Этот результат распространен в статье [15] на случай потенциалов, удовлетворяющих парциальным условиям излучения. При этом существенным образом используются известные теоремы единственности решений внешних задач Дирихле

и Неймана для двумерного уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом [23]. Установленные свойства потенциала позволяют заключить, что если при некотором значении  $\beta_0$  задача (2.2) – (2.5) имеет лишь тривиальное решение, то оператор-функция  $A(\beta)$  не может иметь собственной функции, отвечающей тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ . Отсюда непосредственно вытекает требуемый результат.

Доказательство того, что любая собственная функция  $u \in U$  задачи (2.2) – (2.5), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями проводится на основе теорем единственности решений внешних и внутренних задач Дирихле и Неймана и отмеченных выше свойств потенциалов простого слоя. Из представимости собственных функций задачи (2.2) – (2.5) в виде потенциалов простого слоя непосредственно вытекает справедливость последнего утверждения теоремы 2.5.

**Теорема 2.6.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (2.25), не пусто, а именно,  $C_0^{(1)} \cup B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+, \pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$  при каждом фиксированном  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ , установленной в теореме 2.4, теоремы 2.3 о локализации собственных значений задачи (2.2) – (2.5) и теоремы 2.5 о связи решений задач (2.2) – (2.5) и (2.25), оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  обратим для любых

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in (C_0^{(1)} \cup B) \times \mathbb{R}_+^3.$$

Таким образом, справедливость настоящей теоремы непосредственно следует из установленных в теореме 2.4 свойств оператор-функции  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$ , теоремы И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна 2.1 об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморф-

ной оператор функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg 2.2 о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция является совместно непрерывной функцией  $\beta$  и  $\omega$ . Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для частного случая, когда оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  имеет вид  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $B(\beta, \omega)$  — вполне непрерывный оператор.  $\square$

### § 3. Векторная задача в полной электродинамической постановке

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и произвольным постоянным показателем преломления. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ . Показатель преломления  $n$  является кусочно-постоянной функцией, а именно он равен константе  $n_+$  в области  $\Omega$ , а в области  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  — константе  $n_\infty$ ; пусть  $0 < n_\infty < n_+$ . Постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. главу 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (2.29)$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость свободного пространства, векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 7.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}$  и  $\overline{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (2.29) в пространстве  $U^6 = U \times \dots \times U$ .

Потребуем, чтобы на контуре  $\Gamma$  векторы  $E, H$  удовлетворяли условиям сопряжения (см. главу 1), которые заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $E, H$

должны быть непрерывны:

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \Gamma, \quad (2.30)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Gamma. \quad (2.31)$$

Следуя результатам главы 1, будем предполагать, что функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, то есть существует такая константа  $R_0$ , что для всех  $x : |x| \geq R_0$  эти функции разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (2.32)$$

Здесь  $\chi_{\infty} = \sqrt{k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ .

При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  — пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_{\infty}$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ , соответственно:

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_{\infty}. \quad (2.33)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ .

Строение поверхности  $\Lambda_{\infty}$  подробно рассмотрено в главе 1 (там она была обозначена  $\Lambda$ ). Поверхность  $\Lambda_+$  устроена аналогично. Пусть

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{+0}^{(1)} \cap \Lambda_{\infty 0}^{(1)}$$

— пересечение главных (“физических”) листов этих поверхностей, определяемых условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi_+(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_+(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{+0}^{(1)}, \quad (2.34)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_{\infty}(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_{\infty}(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{\infty 0}^{(1)}. \quad (2.35)$$

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Пусть  $G$  — объединение двух интервалов оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_{\infty} < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим множества

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_{\infty} \right\},$$

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)},$$



$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_+ \right\}.$$

**Определение 2.7.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.29) – (2.32).

**Теорема 2.7.** Мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , за исключением множества  $G$ , не содержат собственных значений задачи (2.29) – (2.32).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вещественная и мнимая оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  представляют собой объединение трех множеств  $B$ ,  $D$  и  $G$ . Докажем, что множества  $B$  и  $D$  свободны от собственных значений задачи (2.29) – (2.32). Предположим, что  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (2.29) – (2.32), отвечающий собственному значению  $\beta \in B \cup D$ . Согласно утверждению 1.1, с. 9, для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  имеет место равенство

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E) = k^2 n^2 E, \quad (2.36)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_R = \{x \in \Omega_\infty : |x| < R\},$$

$$\Gamma_R = \{x \in \Omega_\infty : |x| = R\},$$

где  $R \geq R_0$ . Умножим скалярно обе части уравнения (2.36) на  $\bar{E}$ , проинтегрируем по области  $\Omega \cup \Omega_R$ , применим формулу интегрирования по частям и используем граничные условия (2.30), (2.31). Получим равенство

$$\int_{\Omega \cup \Omega_R} |\operatorname{rot}_\beta E|^2 dx + \int_{\Gamma_R} \nu \times \operatorname{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = k^2 \int_{\Omega \cup \Omega_R} n^2 |E|^2 dx. \quad (2.37)$$

Для любой функции  $E$ , разлагающейся в ряд (2.32), и любого значения  $\beta \in D$  (то есть при  $\chi_\infty > 0$ ) справедливо равенство

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_R} \nu \times \operatorname{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = -4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_l|^2. \quad (2.38)$$

В этом можно убедиться непосредственными вычислениями. Из двух последних равенств следует, что  $A_l = 0$  для всех  $l$  и  $R \geq R_0$ . Следовательно,  $E = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . Как было доказано в утверждении 1.2,

с. 9, функция  $E$  удовлетворяет в области  $\Omega_\infty$  уравнению Гельмгольца (1.16) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_\infty$ . Таким образом,

$$E = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.39)$$

Следовательно,

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\text{rot}_\beta E = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.40)$$

Докажем теперь, что вектор  $\{E, H\}$  равен нулю и в области  $\Omega$ . Согласно утверждению 1.5, с. 13, все компоненты этого вектора в рассматриваемом случае выражаются через две функции  $E_3$  и  $H_3$ , удовлетворяющие в области  $\Omega$  уравнению Гельмгольца (1.33), с. 13, с постоянным коэффициентом. Из (2.39), (2.40) и условий сопряжения (1.48), с. 17, следует, что

$$E_3^- = 0, \quad \frac{\partial E_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad H_3^- = 0, \quad \frac{\partial H_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.41)$$

Применим в области  $\Omega$  к функциям  $E_3$  и  $H_3$  третью формулу Грина (2.9), с. 45, выражающую решение уравнения Гельмгольца (1.33), с. 13, в  $\Omega$  через предельное значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma$ . Заключим, что  $E_3 = 0$  и  $H_3 = 0$  в области  $\Omega$ . Используем представления (1.30), (1.31), с. 13, для остальных компонент вектора  $\{E, H\}$ . Заключим, что он равен нулю в  $\Omega$ . В силу предположения о гладкости  $\{E, H\}$  этот вектор равен нулю и на контуре  $\Gamma$ . Итак, мы доказали, что при  $\beta \in D$  вектор  $\{E, H\}$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Это противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta \in D$ . Следовательно, множество  $D$  свободно от собственных значений задачи (2.29) – (2.32).

Для любого  $\beta \in B$  и любой функции  $E$ , разлагающейся в ряд (2.32), в силу асимптотики (1.63), с. 24, подынтегральные выражения в равенстве (2.37) экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Перейдем в (2.37) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\text{rot}_\beta E|^2 dx = k^2 \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} n^2 |E|^2 dx. \quad (2.42)$$

Используем уравнения (1.9) и (1.13), с. 9, формулу интегрирования

по частям и условие сопряжения (2.30). Получим равенство

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E}|^2 dx = \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\nabla \mathbf{E}|^2 dx + \beta^2 \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\mathbf{E}|^2 dx. \quad (2.43)$$

Объединим (2.42) и (2.43). Получим неравенство

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\nabla \mathbf{E}|^2 dx + (\beta^2 - k^2 n_+^2) \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\mathbf{E}|^2 dx \leq 0. \quad (2.44)$$

Для любого  $\beta \in B$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.44) больше нуля, следовательно,

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = 1/(i\omega\mu_0)\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Это противоречит предположению о том, что вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  является собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta \in B$ . Таким образом, множество  $\beta \in B$  свободно от собственных значений задачи (2.29) – (2.32).  $\square$

Отметим, что доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.29) – (2.32) в области  $G$  с помощью неравенства (2.44) нельзя в силу того, что для любого  $\beta \in G$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.44) меньше нуля. Также нельзя доказать с помощью этого неравенства и отсутствие собственных значений вне вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , так как формула (2.43), из которой вытекает неравенство (2.44), справедлива лишь для вещественных  $\beta \in B$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны. Комплексным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$  отвечают комплексные собственные волны. Теорема 2.7 обобщает результаты [18] и [3] о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. пункт 1 §6 главы 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем теперь задачу (2.29) – (2.32) к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода. Пусть вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in U^6$  является собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Напомним, что

точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, как было доказано в утверждении 1.5, с. 13, существуют такие потенциальные функции  $u, v \in U$ , что

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ E_2 &= \frac{-i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ E_3 &= u, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ H_2 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ H_3 &= v. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.47)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.48)$$

Как было доказано в утверждении 1.6, с. 17, на контуре  $\Gamma$  должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u^+ &= u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \Gamma, \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma, \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Из разложения (2.32) следует, что для всех  $x : |x| \geq R_0$  функции  $u, v$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{3,l} \\ B_{3,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (2.50)$$

Очевидно, что если при некотором  $\beta_0 \in \Lambda$  будет найдено нетривиальное решение  $\{u, v\} \in U^2$  задачи (2.47) – (2.50), то вектор, построенный по формулам (2.45), (2.46), будет собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Решения задачи (2.47) – (2.50) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_+(y) \\ g_+(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_{\infty}(y) \\ g_{\infty}(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega_{\infty} \quad (2.52)$$

с плотностями  $f_+, f_{\infty}, g_+, g_{\infty}$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$ . Здесь

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.53)$$

$$\Phi_{\infty}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta) |x - y|). \quad (2.54)$$

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_{\infty}, g_+, g_{\infty} \in C^{0,\alpha}$  функции  $u, v$ , задаваемые равенствами (2.51), (2.52), удовлетворяют требуемым свойствам гладкости и уравнениям (2.47), (2.48). С помощью разложения (2.15) нетрудно убедиться, что функции  $u, v$  удовлетворяют условию (2.50).

Используем теперь граничные условия (2.49) для того, чтобы получить нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений. Граничные условия (2.49) содержат предельные значения касательных производных функций  $u, v$  на контуре  $\Gamma$ . По аналогии с [24], с. 56, можно показать, что для любого  $\beta \in \Lambda$  касательные производные потенциалов простого слоя (2.51) с непрерывными по Гельдеру плотностями при  $x \rightarrow z \in \Gamma$  представимы сингулярными интегралами с ядром Коши:

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \tau} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) f_+(y) dl(y), \quad z \in \Gamma,$$

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} \frac{\partial v(x)}{\partial \tau} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) g_+(y) dl(y), \quad z \in \Gamma.$$

Используя граничные условия (2.49), предельные свойства потенциалов простого слоя, их нормальных и касательных производных, получаем нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений:

$$(\mathcal{A}(\beta)f)(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.55)$$

Здесь

$$\mathcal{A}f = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1,1)} & \mathcal{A}^{(1,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^{(2,3)} & \mathcal{A}^{(2,4)} \\ \mathcal{A}^{(3,1)} & \mathcal{A}^{(3,2)} & \mathcal{A}^{(3,3)} & 0 \\ \mathcal{A}^{(4,1)} & 0 & \mathcal{A}^{(4,3)} & \mathcal{A}^{(4,4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_+ \\ f_\infty \\ g_+ \\ g_\infty \end{bmatrix},$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ \right)(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_\infty \right)(x) = - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,3)}(\beta) g_+ \right)(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) g_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,4)}(\beta) g_\infty \right)(x) = - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) g_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(3,1)}(\beta) f_+ \right)(x) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 n_+^2 \omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{f_+(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(3,2)}(\beta) f_\infty \right)(x) =$$

$$= - \frac{\varepsilon_0 n_\infty^2 \omega}{\chi_\infty^2(\beta)} \left( - \frac{f_\infty(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(3,3)}(\beta) g_+ \right)(x) =$$

$$= \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} g_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\begin{aligned}
& \left( \mathcal{A}^{(4,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \\
& = \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma, \\
& \left( \mathcal{A}^{(4,3)}(\beta) g_+ \right) (x) = \\
& = -\frac{\mu_0 \omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{g_+(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} g_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma, \\
& \left( \mathcal{A}^{(4,4)}(\beta) g_\infty \right) (x) = \\
& = \frac{\mu_0 \omega}{\chi_\infty^2(\beta)} \left( -\frac{g_\infty(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} g_\infty(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Функции  $\Phi_+(\beta; x, y)$ ,  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  имеют логарифмическую особенность при  $x = y$ . Ядра интегральных операторов, содержащих нормальные производные этих функций, непрерывны. Операторы, ядра которых содержат касательные производные функций  $\Phi_+(\beta; x, y)$  и  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  – сингулярные интегральные операторы с ядром Коши. Пусть контур  $\Gamma$  задан параметрически:  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Перейдем к переменной интегрирования  $t$ , выделим явно особенности ядер и преобразуем систему (2.55) к виду

$$(\mathcal{C}(\beta)w)(t) + (\mathcal{B}(\beta)w)(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.56)$$

Здесь вектор  $w = (w^{(j)})_{j=1}^4$  имеет компоненты

$$\begin{aligned}
w^{(1)}(t) &= (f_+(x) - f_\infty(x))|r'(t)|, \\
w^{(2)}(t) &= (g_+(x) - g_\infty(x))|r'(t)|, \\
w^{(3)}(t) &= f_+(x)|r'(t)|, \\
w^{(4)}(t) &= g_+(x)|r'(t)|.
\end{aligned}$$

Интегральные операторы  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  определены с помощью следующих равенств:

$$\mathcal{C}(\beta)w = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ c_{3,1}(\beta)I & c_{3,2}(\beta)S & c_{3,3}(\beta)I & c_{3,4}(\beta)S \\ c_{4,1}(\beta)S & c_{4,2}(\beta)I & c_{4,3}(\beta)S & c_{4,4}(\beta)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \\ w^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1}(\beta) &= \frac{\omega \varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{3,2}(\beta) &= c_{4,1}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\
c_{3,3}(\beta) &= \frac{\omega \varepsilon_0 n_+^2}{\chi_+^2(\beta)} + \frac{\omega \varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{3,4}(\beta) &= c_{4,3}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\
c_{4,2}(\beta) &= -\frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} & c_{4,4}(\beta) &= -\frac{\omega \mu_0}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\
\mathcal{B}(\beta)w &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{(1,1)}(\beta) & 0 & \mathcal{B}^{(1,3)}(\beta) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^{(2,2)}(\beta) & 0 & \mathcal{B}^{(2,4)}(\beta) \\ \mathcal{B}^{(3,1)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,2)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,3)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,4)}(\beta) \\ \mathcal{B}^{(4,1)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,2)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,3)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,4)}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \\ w^{(4)} \end{bmatrix}, \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}^{(1,1)}(\beta) = \mathcal{B}^{(2,2)}(\beta) = L^{-1} B_\infty^{(1)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(1,3)}(\beta) = \mathcal{B}^{(2,4)}(\beta) = L^{-1} \left( B_+^{(1)}(\beta) - B_\infty^{(1)}(\beta) \right),$$

$$\mathcal{B}^{(3,1)}(\beta) = -\frac{\omega \varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(3,2)}(\beta) = \mathcal{B}^{(4,1)}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(3)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(3,3)}(\beta) = -\frac{\omega \varepsilon_0 n_+^2}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(2)}(\beta) - \frac{\omega \varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(3,4)}(\beta) = \mathcal{B}^{(4,3)}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(3)}(\beta) - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(3)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(4,2)}(\beta) = \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}^{(4,4)}(\beta) = \frac{\omega \mu_0}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(2)}(\beta) + \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta).$$

Здесь  $I$  — единичный оператор в пространстве  $C^{0,\alpha}$ , остальные операторы имеют следующий вид:

$$Lu = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{2.59}$$

$$Su = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} u(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{2.60}$$



$$B_{+/\infty}^{(k)}(\beta)u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+/\infty}^{(k)}(\beta; t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau) = 2\pi\Phi_{+/\infty}(\beta; x, y) + \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right|,$$

$$h_{+/\infty}^{(2)}(\beta; t, \tau) = 4\pi|r'(\tau)| \frac{\partial \Phi_{+/\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$h_{+/\infty}^{(3)}(\beta; t, \tau) = 2|r'(\tau)| \frac{\partial h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau)}{\partial \tau(x)} - i,$$

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau).$$

Известно, что линейный непрерывный оператор  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$ , определенный равенством (2.59), непрерывно обратим (см., напр., [7], с. 10). При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$B_{+/\infty}^{(1)}(\beta) : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha},$$

$$B_{+/\infty}^{(2)}(\beta), B_{+/\infty}^{(3)}(\beta) : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $h_{+/\infty}^{(2)}, h_{+/\infty}^{(3)}$  не имеют особенностей при  $t = \tau$ , а ядра  $h_{+/\infty}^{(1)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Следовательно, для любого  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{B}(\beta)$ , определенный равенством (2.58), является вполне непрерывным оператором, действующим в банаховом пространстве

$$W = C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha}.$$

Линейный непрерывный оператор  $S : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}$ , определенный равенством (2.60), непрерывно обратим (см., напр., [24], с. 118). Точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, линейный непрерывный оператор  $\mathcal{C} : W \rightarrow W$ , определенный равенством (2.57), непрерывно обратим в  $W$  при любом значении  $\beta \in \Lambda$ .

Таким образом, система интегральных уравнений (2.56) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.61)$$

где вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве  $W$ , определяется при помощи равенства

$$B(\beta) = \mathcal{C}^{-1}(\beta)\mathcal{B}(\beta),$$

а  $I$  — единичный оператор в  $W$ .

Обозначим  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Теорема 2.8.** *При каждом фиксированном*

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

*оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4, с. 52.

Таким образом, задача (2.61) является спектральной задачей для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

**Определение 2.8.** Ненулевую функцию  $w \in W$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение (2.61). Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $W$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : W \rightarrow W\}$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Относительно эквивалентности задач (2.29) – (2.32) и (2.61) справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.5, с. 53 (см. [16]).

**Теорема 2.9.** *Если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то вектор  $\{E, H\}$ , построенный по формулам (2.45), (2.46), где функции  $u, v$  определяются равенствами (2.51), (2.52),  $\beta = \beta_0$ ,*

$$f_+ = w^{(3)} / |r'|,$$

$$\begin{aligned}
f_{\infty} &= \left( w^{(3)} - w^{(1)} \right) / |r'|, \\
g_{+} &= w^{(4)} / |r'|, \\
g_{\infty} &= \left( w^{(4)} - w^{(2)} \right) / |r'|,
\end{aligned}$$

принадлежит множеству  $U^6$  и является собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Если вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.29) – (2.32), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то потенциальные функции  $u = E_3$  и  $v = H_3$  могут быть представлены в виде потенциалов простого слоя (2.51), (2.52) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_{+}$ ,  $f_{\infty}$  и  $g_{+}$ ,  $g_{\infty}$  соответственно. При этом функция

$$w = ((f_{+} - f_{\infty})|r'|, (g_{+} - g_{\infty})|r'|, f_{+}|r'|, g_{+}|r'|) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Из теорем 2.7, 2.8 и 2.9 и результатов [9], [51] непосредственно следует

**Теорема 2.10.** Регулярное множество определенной в (2.61) оператор-функции  $A(\beta)$  не пусто, а именно,  $B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_{+}, n_{\infty}) \in \mathbb{R}_{+}^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_{+}, n_{\infty}) \in \mathbb{R}_{+}^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_{+}$ ,  $\pm kn_{\infty}$  и на бесконечности.

## Задачи и упражнения

1. С помощью теоремы сложения Графа проверьте справедливость формулы

$$\Phi_{+/\infty}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_{+/\infty}(\beta) |x - y|) =$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_{+/\infty} r(y)) \exp(-il\varphi(y)) H_l^{(1)}(\chi_{+/\infty} r(x)) \exp(il\varphi(x)).$$

2. Задача о собственных волнах металлического волновода произвольного поперечного сечения [12]. Пусть контур  $\Gamma$ , ограничивающий область  $\Omega$  поперечного сечения волновода, является дважды непрерывно дифференцируемой кривой. Задача о собственных  $E$ -поляризованных волнах металлического волновода заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$ , непрерывных в  $\bar{\Omega}$  нетривиальных решений  $u = E_z$  уравнения

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.62)$$

удовлетворяющих граничному условию

$$u = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.63)$$

Задача о  $H$ -волнах заключается в поиске постоянных распространения  $\beta$  и отвечающих им дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$ , непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  нетривиальных решений  $u = H_z$  уравнения (1.90), удовлетворяющих граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.64)$$

На основе представления собственных функций  $u$  задач (2.62), (2.63) и (2.62), (2.64) в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Omega,$$

получите нелинейные спектральные задачи для интегральных уравнений Фредгольма второго рода по контуру  $\Gamma$ .

3. Пусть контур  $\Gamma$  задан параметрически:  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , точки  $x \equiv x(t)$  и  $y \equiv y(s)$  принадлежат контуру  $\Gamma$ ,

$$\Phi_{+/\infty}^{(0)}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \chi_{+/\infty} 2R \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right). \quad (2.65)$$

Покажите справедливость следующих формул:

$$\frac{\partial \Phi_{+/\infty}^{(0)}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{i}{4} \chi_{+/\infty} \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| H_1^{(1)} \left( \chi_{+/\infty} 2R \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right), \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \Phi_{+/\infty}^{(0)}(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} = -\frac{i}{8} \chi_{+/\infty} \frac{\sin(t-s)}{\left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( \chi_{+/\infty} 2R \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right). \quad (2.67)$$

4. Преобразуйте систему (2.21), (2.22) к виду, аналогичному (2.23), (2.24), перейдя к переменной интегрирования  $t$  параметрического определения контура  $\Gamma$ , выделив явно логарифмическую особенность ядер  $\Phi_+(\beta; x, y)$ ,  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  с помощью функций (2.65) и используя формулу (2.66).

5. Преобразуйте систему (2.55) к виду, аналогичному (2.56), перейдя к переменной интегрирования  $t$  параметрического определения контура  $\Gamma$  и выделив явно особенности ядер с помощью функций (2.65) – (2.67).

---

---

## ГЛАВА 3

# ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕЙ

### § 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей, имеющего переменный показатель преломления близкий к показателю преломления окружающей среды. Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть  $\Omega$  — ограниченная, не обязательно односвязная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  — вещественная функция, не зависящая от  $x_3$ ;

$$n = n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega;$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0.$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. параграф 5 главы 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Здесь  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Всюду в этой главе будем предполагать, что волновод имеет размытую границу, а именно, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Это предположение существенно используется в следующем параграфе при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты настоящего параграфа

справедливы [17] для более общего случая:  $n \in C^1(\Omega)$ , граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  — липшицева кривая, на  $\Gamma$  функция  $u \in U$  удовлетворяет условиям сопряжения (2.4), с. 42. Однако, в целях единства изложения материала, ограничимся предположением, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$  и в настоящем параграфе.

Будем разыскивать нетривиальные решения  $u(x)$  задачи (3.1), (3.2) в пространстве  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения (1.85), с. 32, то есть при достаточно большом  $R_0$  для всех  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad (3.2)$$

где  $x_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $x_2 = r \sin(\varphi)$ ,  $H_l^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ ,

$$\chi_{\infty}(\beta) = \sqrt{kn_{\infty}^2 - \beta^2}.$$

Будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в главе 1.

Пусть  $G = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, kn_{\infty} < |\beta| < kn_+ \right\}$  — объединение двух интервалов на вещественной оси главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ ;  $B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\}$  — бесконечный интервал на вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ ;

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| < kn_{\infty} \right\}$$

— разрез, вдоль которого соединены листы  $\Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)}$ .

**Определение 3.9.** Ненулевую функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  будем называть собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.1), (3.2).

**Теорема 3.11.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (3.1), (3.2) могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u$  — собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим

в области  $\Omega_R$ ,  $R \geq R_0$  к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина. Получим

$$\int_{\Omega_R} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = \int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl$$

и, следовательно,

$$\int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0,$$

так как  $k^2 n^2 > \beta^2$  при  $\beta \in D$ . Используем условие (3.2) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$ . Получим:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] |a_l|^2 = 0,$$

где  $a_l$  — коэффициенты ряда (3.2), в который разлагается функция  $u$ . Хорошо известно (см., напр., [32]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно:

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) = \frac{4}{i\pi \chi_\infty R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (3.2) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Оператор Гельмгольца (3.1) имеет внутри области  $\Omega_{R_0}$  фундаментальное решение (см., напр., [12]). Обозначим его через  $\Phi(\beta; x, y)$ . Используя третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (3.1) в  $\Omega_{R_0}$  через значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma_{R_0}$ ,

$$u(x) = - \int_{\Gamma_{R_0}} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_{R_0}, \quad (3.3)$$

найдем, что  $u = 0$  при  $x \in \Omega_{R_0}$ . Итак, задача (3.1), (3.2) при  $\beta \in D$  имеет только тривиальное решение.

При остальных  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  из условий (3.1), (3.2) и асимптотической формулы (1.63), с. 24, нетрудно получить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (3.4)$$



Для этого надо применить в  $\Omega_R$  формулу Грина

$$\int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl$$

и устремить  $R$  к бесконечности. При этом следует учесть, что согласно асимптотике (1.63), с. 24, все подынтегральные выражения в этой формуле экспоненциально убывают на бесконечности при любом

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D.$$

При вещественных  $\beta$ , лежащих в интервале  $B$ , равенству (3.4) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то из этого равенства сразу вытекает, что  $u = 0$  на всей плоскости. Если  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то из него следует, что  $\nabla u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ , то есть  $u$  всюду принимает постоянное значение. Но из асимптотики (1.63), с. 24, вытекает, что на бесконечности  $u$  обращается в нуль. Значит  $u$  равняется нулю всюду. Возьмем от левой и правой частей равенства (3.4) мнимую часть, получим

$$\operatorname{Im} \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения  $\beta$  задачи (3.1), (3.2) на  $\Lambda_0^{(1)}$  не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличными от нуля, то есть принадлежать множеству  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \cup D \cup G)$ .  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по области поперечного сечения волновода.** Сведем задачу (3.1), (3.2) к спектральной задаче для интегральной фредгольмовой голоморфной по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывной по

$$(\beta; \omega, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^2$$

оператор-функции с целью изучения качественных свойств спектра.

**Лемма 3.1.** Пусть  $u$  — собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда

$$u(x) = (B(\beta)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.5)$$

$$(B(\beta)u)(x) = \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) p(y) u(y) dy,$$

$$p(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_\infty^2,$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] u = -pu.$$

Далее рассуждения проводятся на основе стандартного метода (см., напр., [10]) построения интегрального представления решения неоднородного уравнения Гельмгольца с помощью формулы Грина. Применить этот метод для всех  $\beta \in \Lambda$  можно в силу известного равенства (см. [13], с. 35; [47]; [4])

$$\int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial u(y)}{\partial |y|} \Phi_\infty(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial |y|} u(y) \right) dl(y) = 0, \quad R \geq R_0,$$

справедливого для любого  $\beta \in \Lambda$  и произвольной  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющей условию (3.2). Отметим также, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  удовлетворяет парциальным условиям излучения (3.2) при любом  $\beta \in \Lambda$ . В этом легко убедиться с помощью теоремы сложения Графа [25], с. 201.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  положим

$$(K(\beta)v)(x) = \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) p^{1/2}(x) p^{1/2}(y) v(y) dy. \quad (3.6)$$

Будем рассматривать оператор  $K(\beta)$  как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $L_2(\Omega)$ . Пусть

$$A(\beta) = I - K(\beta),$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $K(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**Определение 3.10.** Ненулевую функцию  $v \in L_2(\Omega)$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение

$$A(\beta)v = 0. \quad (3.7)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $L_2(\Omega)$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)\}$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода (3.1), (3.2) и спектральной задачи (3.7) для оператор-функции  $A(\beta)$ .

**Теорема 3.12.** *Если  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  является собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то*

$$v = p^{1/2}u \in L_2(\Omega)$$

*есть собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $v \in L_2(\Omega)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то*

$$u = B(\beta_0) \left( p^{-1/2}v \right) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

*есть собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta_0$ .*

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.1. Докажем второе утверждение. Пусть функция  $v \in L_2(\Omega)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ . При любом значении  $\beta \in \Lambda$  ядро  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  слабополярно. Следовательно, функция  $u = B(\beta_0) (p^{-1/2}v)$  непрерывна в  $\bar{\Omega}$  (см., напр., [5], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [5], с. 463) функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$ ; число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют уравнению (3.1). С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [25], с. 201) нетрудно убедиться, что число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют условию (3.2).  $\square$

**Теорема 3.13.** *Регулярное множество определенной в (3.7) оператор-функции  $A(\beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состо-*

ать лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая аналогично [13], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция трех переменных  $\beta \in \Lambda$ ,  $\omega > 0$  и  $n_\infty > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.11 о локализации собственных значений задачи (3.1), (3.2) и теоремы 3.12 о спектральной эквивалентности задач (3.1), (3.2) и (3.7) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $\omega, n_\infty > 0$  и  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$ . Таким образом, справедливость теоремы вытекает из теорем 2.1 и 2.2.  $\square$

**4. Существование собственных значений.** Ответ на вопрос, существуют ли собственные значения задачи (3.1), (3.2), дает следующая теорема.

**Теорема 3.14.** *Задача (3.1), (3.2) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение  $\beta$ , принадлежащее множеству  $G$ , которому отвечает положительная собственная функция.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть оператор  $K(\beta)$  при  $\beta \in G$  определяется равенством (3.6) и рассматривается, как действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ . При фиксированных  $\beta \in G$  введем в рассмотрение задачу

$$v = \gamma K(\beta)v.$$

Решения этой задачи  $\gamma = \gamma(\beta)$  и  $v \neq 0$  называются характеристическим значением и собственной функцией оператора  $K(\beta)$  соответственно. Заметим, что  $K(\beta)$  при любом  $\beta \in G$  является интегральным оператором с симметричным слабополярным положительным ядром (см., напр., [5], с. 327).

Ясно, что, если при некотором  $\beta_0 \in G$  функция  $v$  является собственной функцией оператора  $K(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\gamma = 1$ , то  $v$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

При фиксированном положительном  $\beta \in G$  оператор  $K(\beta)$  имеет счетное множество положительных характеристических значений. Для минимального из них справедливо равенство (см., напр., [5], с. 326):

$$\gamma_1(\beta) = \inf_{f \in L_2(\Omega)} \frac{(f, f)}{(K(\beta)f, f)}, \quad (3.8)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ . Покажем теперь, что существует такое  $\beta \in G$ , при котором  $\gamma_1(\beta) = 1$ . В силу непрерывной зависимости  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  от  $\beta \in \Lambda$  функция  $\gamma_1 = \gamma_1(\beta)$  непрерывна. Из (3.8) и предельного соотношения  $\Phi_\infty(\beta; x, y) \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$  следует, что  $\gamma_1(\beta) \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$ .

Докажем, что  $\gamma_1(kn_+) > 1$ . Пусть  $v \in L_2(\Omega)$  — собственная функция оператора  $K(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\gamma_1$  при фиксированном  $\beta = kn_+$ . Для функции

$$u = \gamma_1 B(kn_+) (p^{-1/2}v),$$

рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 3.11, 3.12, получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + (k^2 n_+^2 - k^2 n_\infty^2) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx - \gamma_1 \int_{\Omega} p |u|^2 dx = 0.$$

Очевидно, что при  $\gamma_1 \leq 1$  функция  $u$  может быть только нулевой. Поэтому  $\gamma_1(kn_+) > 1$ .

Обозначим через  $\beta_1$  решение уравнения  $\gamma_1(\beta) = 1$ . По теореме Ентча (см., напр., [5], с. 329)  $\gamma_1(\beta_1)$  есть простое характеристическое значение, которому соответствует положительная собственная функция  $v_1$ . Следовательно, число  $\beta_1$  является простым собственным значением задачи (3.1), (3.2), которому отвечает положительная собственная функция  $u_1 = B(\beta_1) (p^{-1/2}v_1)$ .  $\square$

Отметим, что в данном случае в силу симметрии рассматриваемых задач по  $\beta$  относительно начала координат результат этой теоремы остается справедливым и для отрицательного  $\beta \in G$ . Положительное значение  $\beta \in G$  и отвечающая ему собственная функция  $u$ , существование которых доказано в этой теореме, определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной.

## § 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей и произвольным переменным показателем преломления. Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть  $\Omega$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  — вещественная функция из  $C^2(\mathbb{R}^2)$  не зависящая от  $x_3$ ;

$$\begin{aligned} n &= n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega; \\ n_+ &= \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. параграф 1 главы 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений

$$\text{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \text{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, через  $\mu_0$  обозначена магнитная проницаемость свободного пространства, векторная операция  $\text{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 7. Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (3.9) в пространстве  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ .

Следуя результатам главы 1, будем предполагать, что функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, то есть существует такая константа  $R_0$ , что для всех  $x : |x| \geq R_0$  эти функции разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi). \quad (3.10)$$

Здесь  $\chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ . При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в главе 1. Обозначим множества

$$G = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Im} \beta = 0, kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\},$$

$$B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\},$$

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}.$$

**Определение 3.11.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  будем называть собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.9), (3.10).

Если известен собственный вектор  $\{E, H\}$  задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , то собственная волна волновода определяется по формуле (1.2), с. 7. Следовательно, поиск собственных волн сводится к решению нелинейной векторной спектральной задачи (3.9), (3.10).

**Теорема 3.15.** Области  $B$  и  $D$  главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  не содержат собственных значений задачи (3.9), (3.10).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in B$ . Тогда имеет место равенство (1.12), с. 9. Умножим его скалярно на  $\bar{H}$  и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^2$ . Мы имеем право это делать в силу условия (3.10) и асимптотики (1.63), с. 24. В результате получим:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \operatorname{rot}_\beta \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta H \right) \right) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta H \right) \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot}_\beta H \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx = \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta H)) \cdot \bar{H} dx. \end{aligned}$$

Используя равенство (1.14), формулу (1.9), с. 8 и формулу интегрирования по частям, продолжим оценку:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta H + \beta^2 H) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx + \frac{\beta^2}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге получили неравенство

$$(\beta^2 - k^2 n_+^2) \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что значениям  $\beta \in B$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10). Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то  $H = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, и

$$E = -1/(i\omega\varepsilon_0 n^2) \operatorname{rot}_\beta H = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то функция  $H$  принимает постоянное значение в  $\mathbb{R}^2$ . Но из условия излучения (3.10) и асимптотики (1.63), с. 24, для любого  $\beta \in B$  следует, что  $H$  обращается в нуль на бесконечности. Значит,  $H = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  и  $E = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  при  $\beta \in B$ , что противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in B$ . Следовательно область  $B$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).

Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in D$ . Тогда имеет место равенство (1.11), с. 9. Умножим его скалярно на  $\bar{E}$  и проинтегрируем по  $\Omega_R$ , где  $R \geq R_0$ . Для всех  $x : |x| \geq R_0$  справедливо разложение (3.10). Используем формулу (1.9), формулу интегрирования по частям, равенство (1.13) и получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega_R} n^2 |E|^2 dx &= \int_{\Omega_R} (\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E)) \cdot \bar{E} dx = \\ &= \int_{\Omega_R} (-\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E)) \cdot \bar{E} dx = \\ &= - \int_{\Omega_R} |\operatorname{div}_\beta E|^2 dx + \int_{\Omega_R} |\nabla E|^2 dx - \int_{\Gamma_R} \frac{\partial E}{\partial |x|} \cdot \bar{E} dx + \beta^2 \int_{\Omega_R} |E|^2 dx. \end{aligned}$$

Возьмем от левой и правой части полученного равенства мнимую часть:

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial E}{\partial |x|} \cdot \bar{E} dx = 0, \quad R \geq R_0.$$



Из последнего равенства, условия (3.10) и ортогональности тригонометрических функций для любого  $R \geq R_0$  получим

$$2\pi\chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] |A_l|^2 = 0.$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения, стоящего в этой сумме в квадратных скобках, не зависит от  $l$ , а именно:

$$\operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] = \frac{2}{\pi\chi_\infty R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $A_l$  в разложении (3.10) функции  $E$  обращаются в нуль. А это значит, что  $E = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . В силу гладкости показателя преломления  $n$ , функция  $E$  должна обращаться в нуль всюду в  $\mathbb{R}^2$  (см. [39], с. 190). Тогда

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\operatorname{rot}_\beta E = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, значениям  $\beta \in D$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10), что противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in D$ . Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабо-сингулярных интегральных уравнений по области поперечного сечения волновода.** Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (3.9), (3.10) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. При этом мы будем использовать электромагнитные потенциалы, введенные в главе 1.

**Лемма 3.2.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда справедлива формула

$$E(x) = (B(\beta)E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} (B(\beta)E)(x) = & k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) E(y) dy + \\ & + \operatorname{grad}_\beta \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\operatorname{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\Phi_{\infty}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор Герца  $\Pi$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (1.27), с. 12. Будем рассуждать аналогично доказательству леммы 3.1 и запишем решение этого уравнения в виде

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из равенства (1.25), с. 11, для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим

$$E(x) = (k^2 n_{\infty}^2 + \operatorname{grad}_{\beta} \operatorname{div}_{\beta}) \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy.$$

Воспользуемся теперь теоремой о дивергенции [36]

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_{\beta} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\beta} [(n^2(y) - n_{\infty}^2) E(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

и формулой (1.29), с. 12. В итоге получим требуемое равенство.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  будем рассматривать оператор  $B(\beta)$ , определенный равенством (3.12), как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Пусть

$$A(\beta) = I - B(\beta), \quad (3.14)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $[L_2(\Omega)]^3$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $B(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**Определение 3.12.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение

$$A(\beta)F = 0. \quad (3.15)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $[L_2(\Omega)]^3$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : [L_2(\Omega)]^3 \rightarrow [L_2(\Omega)]^3\}$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных волнах волновода с размытой границей (3.9), (3.10) и спектральной задачи (3.15) для оператор-функции  $A(\beta)$ .

**Теорема 3.16.** *Если вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то*

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3$$

*есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ , где*

$$E = B(\beta_0)F, \quad H = (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_{\beta_0} E,$$

*есть собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta_0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.2. Докажем второе утверждение. Пусть вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  — собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ . Ядро интегрального оператора  $B(\beta)$  слабополярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, вектор  $E = B(\beta)F$  принадлежит пространству  $[C(\Omega)]^3$  (см., напр., [5], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [5], с. 463) вектор  $E$  принадлежит пространству  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ .

По построению вектор  $E$  удовлетворяет равенству (3.11). Применим к левой и правой частям этого равенства операцию  $\operatorname{rot}_{\beta}$ , учтем формулу (1.5), с. 8, и теорему о дивергенции (3.13). Получим равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\beta} E(x) &= k^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\beta} [(n^2(y) - n_{\infty}^2) E(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy + \\ &+ (\Delta - \beta^2) \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\operatorname{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Добавим и вычтем к правой части этого равенства слагаемое

$$k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy$$

и используем формулу Пуассона для потенциала площади

$$\begin{aligned} [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy = \\ = - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta E(x) = k^2 \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ - k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Далее, в силу линейности операции  $\text{div}_\beta$  и формулы (1.7), с. 8, имеем

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta [(n^2 - n_\infty^2) E] &= \text{div}_\beta (n^2 E) - n_\infty^2 \text{div}_\beta E, \\ E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} &= n^{-2} \text{div}_\beta (n^2 E) - \text{div}_\beta E. \end{aligned}$$

Используя два предыдущих равенства и равенство (3.17), нетрудно видеть, что функция  $u = n^{-2} \text{div}_\beta (n^2 E)$  удовлетворяет уравнению

$$u = \int_{\Omega} k^2 (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

которое совпадает с уравнением (3.5). В пункте 2 было показано, что если  $\beta$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то  $u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, мы получили, что для вектора  $E$  справедлива формула

$$\text{div}_\beta (n^2 E) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.18)$$

и уравнение (3.11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} E(x) = k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) E(y) dy - \\ - \text{grad}_\beta \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Пусть вектор  $\mathbf{H}$  определяется следующим равенством (то есть векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют первому из уравнений (3.9)):

$$\mathbf{H} = (i\omega\mu_0)^{-1} \text{rot}_{\beta_0} \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из уравнения (3.19) и формулы (1.8), с. 8, имеем

$$\mathbf{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_{\beta} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.20)$$

Отсюда следует, в частности, что если  $\mathbf{E} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ , то и  $\mathbf{H} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (3.9). Применим к обеим частям уравнения (3.20) операцию  $\text{rot}_{\beta}$  и полученное равенство почленно сложим с равенством (3.19), умноженным на  $i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2$ :

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\beta} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \mathbf{E} &= -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_{\beta} \text{rot}_{\beta} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \text{grad}_{\beta} \int_{\Omega} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \text{div}_{\beta} \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Продолжим равенство, используя формулу (1.9), с. 8, и теорему о дивергенции (3.13):

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\beta} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \mathbf{E} &= \\ &= i\omega\varepsilon_0 [\Delta + (k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2)] \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 \text{grad}_{\beta} \int_{\Omega} \text{div}_{\beta} [(n^2(y) - n_{\infty}^2) \mathbf{E}(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \text{grad}_{\beta} \int_{\Omega} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) \text{div}_{\beta} \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Из этого равенства, уравнения (3.18) и формулы Пуассона (3.16) окончательно получим

$$\text{rot}_{\beta} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0 (n^2 - n_{\infty}^2) \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, векторы  $E$  и  $H$  удовлетворяют второму из уравнений (3.9). Из (3.19), (3.20) с помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [25], с. 201) легко получить, что векторы  $E$  и  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения (3.10).  $\square$

**Теорема 3.17.** *Регулярное множество определенной в (3.15) оператор-функции  $A(\beta)$  не пусто, а именно,  $B \cup D \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая аналогично [13], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция трех переменных  $\beta \in \Lambda$ ,  $n_\infty > 0$  и  $\omega > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.15 о локализации спектра задачи (3.9), (3.10) и теоремы 3.16 о спектральной эквивалентности задач (3.9), (3.10) и (3.15) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $n_\infty > 0$ ,  $\omega > 0$  и  $\beta \in B \cup D$ . Таким образом, справедливость настоящей теоремы следует из теорем 2.1 и 2.2, с. 41.  $\square$

### Задачи и упражнения

1. Проверьте справедливость формулы

$$\int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial u(y)}{\partial |y|} \Phi_\infty(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial |y|} u(y) \right) dl(y) = 0, \quad R \geq R_0,$$

где  $\beta \in \Lambda$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  и удовлетворяет условию (3.2), с. 71,

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|).$$

2. Проверьте справедливость интегрального представления вектора Герца

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

3. С помощью формулы интегрирования по частям проверьте справедливость следующей формулы:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) E(y) dy = \\ & = \int_{\Omega} \operatorname{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

4. *Плоская задача дифракции волн на цилиндрическом теле [10].* Сформулируем стационарную задачу дифракции (временная зависимость полей вида  $\exp(-i\omega t)$ ) в  $\mathbb{R}^2$  поля электромагнитной волны на цилиндрическом диэлектрическом теле. Обозначим область поперечного сечения тела через  $\Omega$ , а ее границу — через  $\Gamma$ . Будем считать, что граница  $\Gamma$  — липшицева кривая, показатель преломления окружающей среды постоянен:  $n = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ , показатель преломления в области  $\Omega$  принадлежит пространству  $C^1(\Omega)$ . Пусть на тело набегают электромагнитная волна с потенциальной функцией  $u_0$ . Необходимо найти полное  $E$ -поляризованное поле. Оно выражается через функцию  $u = E_z$ , принадлежащую множеству функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}$  и  $\overline{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} & (\Delta + k^2 n_\infty^2) u = -p u, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\ & u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \\ & \left( \frac{\partial}{\partial r} - i k n_\infty \right) u = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $p(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_\infty^2$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Постройте интегральное уравнение Фредгольма второго рода по области  $\Omega$ , которому удовлетворяет функция  $u$ . Проверьте, что этому уравнению удовлетворяет точное решение задачи дифракции волн на цилиндрическом теле кругового поперечного сечения, полученное методом разделения переменных [26].

---

---

## ГЛАВА 4

# ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

### § 1. Элементы теории сингулярных интегральных уравнений

Приведем некоторые сведения теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, следуя [44]. При этом для простоты изложения будем формулировать результаты [44] в частном случае интегралов по области на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим  $x$  и  $y$  точки плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Пусть

$$r = |x - y|, \quad \alpha = (y - x)/r.$$

Точка  $\alpha$  принадлежит единичной окружности с центром в точке  $x$ , которую обозначим  $\Theta$ . Пусть  $\Omega$  — область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Эта область может быть конечной или бесконечной, в частности совпадать с плоскостью  $\mathbb{R}^2$ . Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$v(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus (r < \varepsilon)} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy. \quad (4.1)$$

Точка  $x$  называется полюсом сингулярного интеграла, функция  $u(y)$  — плотностью, а функция  $f(x, \alpha)$  — характеристикой. Во всем последующем изложении будем предполагать, что характеристика удовлетворяет условию

$$\int_{\Theta} f(x, \alpha) dl_{\Theta} = 0. \quad (4.2)$$

Относительно существования интеграла (4.1) справедлива следующая теорема [44, стр. 274].

**Теорема 4.18.** Пусть  $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ , характеристика  $f(x, \alpha)$  удовлетворяет условию (4.2), и для любой точки  $x$  выполняется неравенство

$$\int_{\Theta} |f(x, \alpha)|^2 dl_{\Theta} \leq C = \text{const}.$$



Тогда сингулярный интеграл (4.1) существует и принадлежит пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Сформулируем теорему [44, стр. 242] о дифференцировании слабо сингулярных интегралов следующего вида:

$$w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\psi(x, \alpha)}{r} dy. \quad (4.3)$$

**Теорема 4.19.** Пусть  $u \in L_2(\Omega)$ , функция  $\psi(x, \alpha)$  имеет в  $\overline{\Omega}$  непрерывные первые производные по декартовым координатам точек  $x$  и  $\alpha$ . Тогда интеграл (4.3) имеет обобщенные производные в  $L_2(\Omega)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\psi(x, \alpha)}{r} \right] dy - u(x) \int_{\Theta} \psi(x, \alpha) \cos \varphi dl_{\Theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\psi(x, \alpha)}{r} \right] dy - u(x) \int_{\Theta} \psi(x, \alpha) \sin \varphi dl_{\Theta},$$

где  $\varphi$  — угловая координата точки  $\alpha$  в полярной системе координат с центром в точке  $x$ .

Сингулярным интегральным оператором в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R}^2)$  будем называть линейный оператор  $A$ , который определяется формулой

$$(Au)(x) = a(x)u(x) + \int_{\mathbb{R}^2} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy + (Ku)(x), \quad (4.4)$$

где  $K$  — вполне непрерывный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . При исследовании фредгольмовости сингулярных интегральных операторов вида (4.4) вводится понятие символа сингулярного оператора  $A$ . Символ определяется как функция  $\Psi_A(x, \alpha)$  точек  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $\alpha \in \Theta$ . При этом символ, при определенных ограничениях на  $a(x)$  и  $f(x, \alpha)$ , должен удовлетворять следующим трем условиям:

- 1) символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю;
- 2) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;
- 3) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению их символов.

Существует несколько эквивалентных формул для определения символа. Приведем одну из них, которая удобна для исследования конкретных сингулярных интегральных операторов. Пусть характеристика  $f(x, \alpha)$  разлагается в ряд вида

$$f(x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(x) \sin(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(x) \cos(n\varphi)$$

(член с  $n = 0$  в разложении отсутствует вследствие условия (4.2)). Определим функцию  $\Psi_A(x, \alpha)$  по формуле

$$\Psi_A(x, \alpha) = a(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n a_n^{(1)}(x) \sin(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n a_n^{(2)}(x) \cos(n\varphi), \quad (4.5)$$

где  $\gamma_n = i^n 2\pi/n$ . Если функция  $\Psi_A(x, \alpha)$ , определенная таким образом, является непрерывной функцией своих аргументов, причем существует такая ограниченная область  $\Omega$ , что  $\Psi_A(x, \alpha)$  не зависит от  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , то  $\Psi_A(x, \alpha)$  — символ сингулярного оператора (4.4).

Относительно фредгольмовости сингулярного интегрального оператора (4.4) справедлива следующая теорема [44, стр. 245]. Напомним, что линейный оператор называется фредгольмовым, если он нормально разрешим и его индекс равен нулю.

**Теорема 4.20.** Пусть  $A$  — сингулярный интегральный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^2)$  вида (4.4), а его символ определяется равенством (4.5). Тогда для того, чтобы оператор  $A$  был фредгольмов в  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , необходимо и достаточно, чтобы его символ не вырождался, то есть

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_A(x, \alpha)| > 0.$$

Пусть  $\mathcal{A}$  — матричный сингулярный оператор вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

действующий в пространстве  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$ , где  $A_{l,m}$  — сингулярные интегральные операторы вида (4.4). Обозначим через  $\Psi_{l,m}(x, \alpha)$  символ

оператора  $A_{l,m}$ . Матрица

$$\Psi(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{1,N}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{2,N}(x, \alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N,1}(x, \alpha) & \Psi_{N,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{N,N}(x, \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

называется матричным символом или просто символом матричного оператора  $\mathcal{A}$ . Справедлива следующая теорема [44, стр. 368].

**Теорема 4.21.** Пусть  $\mathcal{A}$  — матричный сингулярный интегральный оператор в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  вида (4.6), и каждый элемент его матричного символа определяется равенством (4.5). Тогда сопряженный к  $\mathcal{A}$  в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  оператор  $\mathcal{A}^*$  имеет матричный символ  $\Psi^*$ , элементы которого определяются формулой

$$\Psi_{l,m}^*(x, \alpha) = \overline{\Psi_{m,l}(x, \alpha)},$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был фредгольмов в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  достаточно, чтобы нижние грани модулей всех главных миноров были строго положительны:

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| > 0, \\ & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| > 0, \\ & \quad \dots \\ & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\det \Psi(x, \alpha)| > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

## § 2. Спектральная задача для сингулярного интегрального уравнения

Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде. Схематическое изображение такого волновода приведено на рис. 1.

Пусть все трехмерное пространство

$$\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$

занято изотропной средой без источников, и пусть показатель преломления  $n = n(x_1, x_2)$  является положительной вещественной функцией, не зависящей от продольной координаты  $x_3$ . Пусть существует

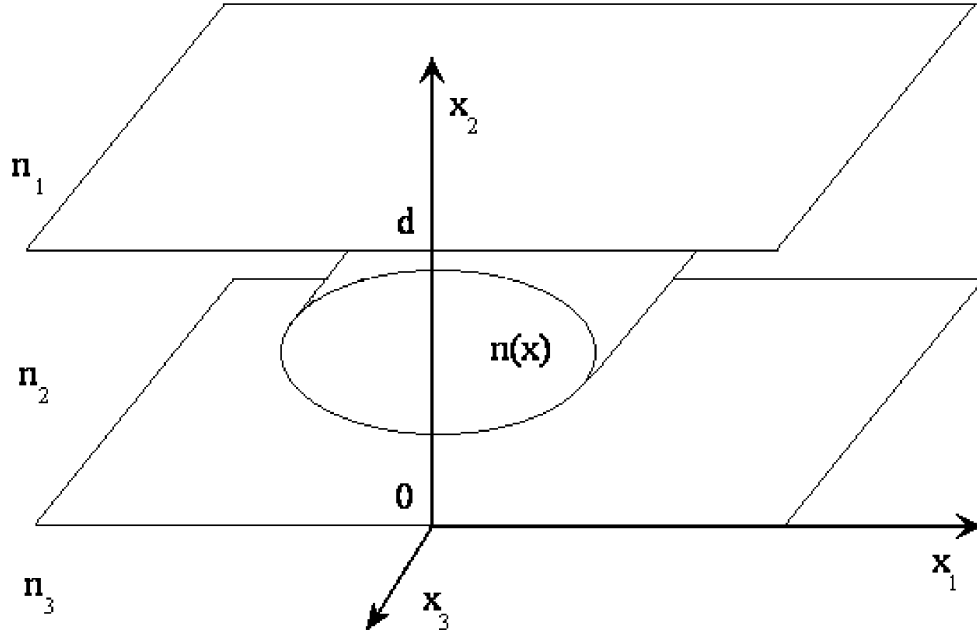


Рис. 1. Геометрия цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде

такая ограниченная область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что

$$n(x) = n_{\infty}(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_{\infty} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega},$$

где  $n_{\infty}(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$ . Для определенности положим

$$n_{\infty}(x_2) = \begin{cases} n_1, & x_2 > d, \\ n_2, & 0 < x_2 < d, \\ n_3, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Можно предположить без потери общности рассуждений, что

$$n_2 \geq n_3 \geq n_1 > 0.$$

Обозначим через  $n_+$  максимум функции  $n$  в области  $\Omega$  и предположим, что

$$n_+ > n_2.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > d\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < d\},$$

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 < 0\}.$$

Предположим, что  $\Omega \subset \Omega_2$  и  $n(x)$  является непрерывной функцией в бесконечной области  $\Omega_2$ , то есть волновод имеет размытую границу. Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы области  $\Omega_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = d\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0\}.$$

Для простоты рассуждений мы рассматриваем трехслойную среду, где возмущение показателя преломления находится целиком в центральном слое, но, в действительности, методами, используемыми в данном параграфе, может быть исследована задача с произвольным конечным числом параллельных слоев, если возмущение целиком находится в одном из них, и волновод имеет размытую границу.

Задача о собственных волнах волновода может быть сформулирована как векторная спектральная задача для системы уравнений Максвелла (1.1), с. 6, в предположении, что векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют вид (1.2), с. 7. Мы рассматриваем постоянную распространения  $\beta$  как неизвестный вещественный параметр и  $\omega > 0$  как заданный параметр. Для полей, имеющих форму (1.2), система уравнений Максвелла (1.1) сводится к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (4.9)$$

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (4.10)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 7.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}_1$ ,  $\overline{\Omega}_2$  и  $\overline{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , кроме того, экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных при  $|x| \rightarrow \infty$  параллельно прямым  $\Gamma_j$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  системы уравнений (4.9), (4.10) в пространстве  $U^6$ . На границах раздела сред векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны удовлетворять условиям сопряжения (см. главу 1)

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad \nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.11)$$

Здесь  $\nu$  — вектор нормали к  $\Gamma_j$ ,  $f^+(f^-)$  — предел функции  $f$  сверху (снизу) прямой  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Обозначим  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности функции  $\ln \chi(\beta)$ , где

$$\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2},$$

который определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

**Определение 4.13.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (4.9) – (4.11), отвечающим собственному значению

$$\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| > kn_2\},$$

если выполнены условия (4.9) – (4.11).

Получим интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (4.9) – (4.11), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Это представление будет использовано для сведения задачи (4.9) – (4.11) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения.

**Определение 4.14.** Вектор-функция  $\Pi$  называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{E, H\}$ , если для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  справедливо представление

$$E = (k^2 n_\infty^2 + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \quad (4.12)$$

$$H = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{rot}_\beta \Pi. \quad (4.13)$$

**Лемма 4.3.** Для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (4.9) – (4.11), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , существует поляризационный потенциал  $\Pi \in U^3$ , который для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) E, \quad (4.14)$$

и для  $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  удовлетворяет граничным условиям

$$\Pi_l^+ = N^2 \Pi_l^-, \quad l = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \Pi_l^+}{\partial x_2} = N^2 \frac{\partial \Pi_l^-}{\partial x_2}, \quad l = 1, 2, \quad (4.16)$$

$$\left( \frac{\partial \Pi_2^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \Pi_2^-}{\partial x_2} \right) = (1 - N^2) \left( \frac{\partial \Pi_1^-}{\partial x_1} + i\beta \Pi_3^- \right), \quad (4.17)$$

где  $N = n_{i+1}/n_i$  для  $x \in \Gamma_i$ ;  $f^+(f^-)$  — предел функции  $f$  сверху (снизу) на прямой  $\Gamma_i$ . Для  $x \in \mathbb{R}^2$  поляризационный потенциал  $\Pi$  имеет интегральное представление

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned} G(\beta; x, y) &= \Phi(\beta; x, y) + G^s(\beta; x, y), \\ \Phi(\beta; x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta) |x - y|), \end{aligned}$$

$$G^s(\beta; x, y) = \begin{bmatrix} G_n(\beta; x, y) & \partial G_c(\beta; x, y) / \partial x_1 & i\beta G_c(\beta; x, y) \\ 0 & G_t(\beta; x, y) & 0 \\ 0 & 0 & G_t(\beta; x, y) \end{bmatrix},$$

$$G_\alpha(\beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda) \frac{\exp(i\lambda(x_1 - y_1))}{2\sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_2^2}} d\lambda,$$

$$\alpha = t, n, c.$$

Функции  $R_\alpha$  определяются геометрией задачи и для трехслойной окружающей среды представлены в приложении А, с. 103;  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода индекса 0.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Известно, что существует такой вектор  $\Pi$ , что представление (4.12), (4.13) и уравнение (4.14) справедливы (см., напр., [35]). Если поляризационный потенциал  $\Pi$  удовлетворяет условиям (4.15) – (4.17), то векторы  $E$  и  $H$ , имеющие представление (4.12), (4.13) удовлетворяют условиям (4.11). Задача (4.14) – (4.17) имеет решение в виде (4.18) [33]. Функция  $G(\beta; x, y)$  — хорошо известная тензорная функция Грина для поляризационного потенциала [34]. Используя представление (4.18) для поляризационного потенциала  $\Pi$  можно доказать, что  $\Pi \in U^3$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .  $\square$

Используем (4.12), (4.18) и получим интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (4.9) – (4.11), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ :

$$E(x) = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (4.19)$$

$$H(x) = -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy,$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ .

Сведем теперь задачу (4.9) – (4.11) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения, аналогичного уравнению, полученному в [33]. Это уравнение часто используется на практике потому, что оно точно учитывает поведение поля в окружающей слоистой среде.

**Лемма 4.4.** Пусть  $\{E, H\}$  – собственный вектор задачи (4.9) – (4.11), отвечающий собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$(\mathcal{Q}(\beta)E)(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}(\beta)E)(x) &= E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ &- \int_{\Omega} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega} L(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \\ TF &= \begin{bmatrix} (KF)_1 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_1 \\ (KF)_2 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_2 \\ i\beta F_1 \partial\Phi/\partial x_1 + i\beta F_2 \partial\Phi/\partial x_2 + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2) F_3 \Phi \end{bmatrix}, \\ T_1 F &= \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \eta(x) &= \begin{pmatrix} n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K(\beta; x, y)F(y) &= k^2 n_\infty^2 F(y) \Phi(\beta; x, y) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, \\
\Phi_0(\beta; x, y) &= \Phi(\beta; x, y) - \Phi_1(x, y), \\
L(\beta; x, y)F(y) &= (k^2 n_\infty^2 + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) G^s(\beta; x, y)F(y), \\
\mathbf{F} &= (F_1, F_2)^T.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы доказывается непосредственными вычислениями. Для этого надо внести оператор  $\operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta$  под знак интеграла в соотношении (4.19) и использовать правило дифференцирования слабо сингулярных интегралов (см., теорему 4.19). Отметим, что применение этих преобразований обосновано, так как плотности возникающих сингулярных интегралов равны нулю вне области  $\Omega$  и принадлежат пространству  $L_2(\Omega)$  в силу гладкости  $E$  и  $n$ . Отметим также, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  и  $y \in \Omega$  функции  $G^s(\beta; x, y)$  и  $\Phi_0(\beta; x, y)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x \in \Omega$ .

Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$ , определенный равенством (4.20), будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  имеет сильно сингулярное ядро  $T_1(x, y)$ .

### § 3. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора

**Теорема 4.22.** *При любом  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\beta$  — фиксированное число, принадлежащее  $\widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Через  $\mathcal{Q}^*(\beta)$  обозначим оператор, сопряженный с  $\mathcal{Q}(\beta)$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \Omega$  получим

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}^*(\beta)E)(x) &= E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\
&- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\Omega} T^p(\beta; x, y) E(y) dy - \\
&- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\Omega} T_1(x, y) E(y) dy - \\
&- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\Omega} L^p(\beta; x, y) E(y) dy,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$T^p \mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\overline{K\mathbf{F}})_1 + i\overline{\beta}F_1\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 \\ (\overline{K\mathbf{F}})_2 + i\overline{\beta}F_2\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 \\ i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 + i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 + \left(k^2n_\infty^2 - \overline{\beta^2}\right)F_3\overline{\Phi} \end{bmatrix},$$

$$L^p \mathbf{F} = (k^2n_\infty^2 + \overline{\text{grad}_\beta \text{div}_\beta}) \overline{G^s(\beta; y, x)}^T \mathbf{F}(y),$$

где  $\overline{\text{grad}_\beta}$  и  $\overline{\text{div}_\beta}$  означает, что множитель  $(i\beta)$  заменяется множителем  $(-i\overline{\beta})$ ;  $G^T$  — матрица транспонированная к  $G$ .

Заметим, что ядро  $T_1(x, y)$  сильно сингулярное, самосопряженное и не зависит от  $\beta$ ; ядра  $T(\beta; x, y)$ ,  $T^p(\beta; x, y)$  слабо полярные для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ ; ядра  $L(\beta; x, y)$  и  $L^p(\beta; x, y)$  непрерывны по  $x, y \in \Omega$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .

Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов. Будем использовать теорему 4.21. Положим

$$(\mathcal{D}(\beta)\mathbf{E})(x) = \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \quad (4.22)$$

$$-p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy - \quad (4.23)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy, \quad (4.24)$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $p(x)$  — бесконечно дифференцируемая вещественнозначная функция, имеющая компактный носитель в  $\mathbb{R}^2$ , и тождественно равная единице для  $x \in \Omega$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим

$$(\mathcal{D}^*(\beta)\mathbf{E})(x) = \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \quad (4.25)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} p(y) (T^p(\beta; x, y) + L^p(\beta; x, y)) \mathbf{E}(y) dy - \quad (4.26)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (4.27)$$

Интегральные операторы, определенные слагаемыми (4.23) и (4.26), в силу гладкости их ядер для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  вполне непрерывны

в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Обозначим их через  $\mathcal{C}(\beta)$  и  $\mathcal{C}^*(\beta)$  соответственно. Положим для  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ - \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \end{aligned} \quad (4.28)$$

тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^*E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ - \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy \end{aligned} \quad (4.29)$$

и

$$\mathcal{D}(\beta) = \mathcal{C}(\beta) + \mathcal{S}, \quad \mathcal{D}^*(\beta) = \mathcal{C}^*(\beta) + \mathcal{S}^*,$$

где  $S^* = [S_{l,m}^*]_{l,m=1}^3$  — матричный интегральный оператор. Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $l, m = 1, 2$  получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{l,m}^* E_m)(x) = \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \right) \delta_{l,m} E_m(x) - \\ - \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} (2\alpha_l(\varphi)\alpha_m(\varphi) - \delta_{l,n}) \frac{E_m(y)}{2\pi |x-y|^2} dy, \\ (\mathcal{S}_{3,3}^* E_3)(x) = E_3(x), \\ (\mathcal{S}_{l,3}^* E_3)(x) = 0, \\ (\mathcal{S}_{3,m}^* E_m)(x) = 0, \end{aligned}$$

где  $\delta_{l,m}$  — символ Кронекера;  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\alpha_2(\varphi)$  — декартовы координаты точки  $\alpha = (y-x)/|x-y|$ . Точка  $\alpha$  принадлежит окружности

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\},$$

и

$$\alpha_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad \alpha_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad (4.30)$$

где  $\varphi$  — угловая координата точки  $\alpha$ . Функция  $n$  непрерывна в  $\Omega_2$ , и  $n(x) = n_\infty$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Следовательно, характеристики операторов  $\mathcal{S}_{l,n}^*$  непрерывны в  $\mathbb{R}^2$  и не зависят от  $x$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ .

Непосредственными вычислениями получаем представление матричного символа  $\Psi^*(x, \alpha)$  оператора  $\mathcal{S}^*$ :

$$\Psi^*(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1^2(\varphi) & \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi) \alpha_2(\varphi) & 0 \\ \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi) \alpha_2(\varphi) & 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_2^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \Theta$ . Функция  $n$  вещественна, следовательно матричный символ  $\Psi(x, \alpha)$  сингулярного интегрального оператора  $\mathcal{S}$  равен символу  $\Psi^*(x, \alpha)$ :

$$\Psi(x, \alpha) = \Psi^*(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \Theta. \quad (4.32)$$

Очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\det \Psi(x, \alpha)| &> 0, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| &> 0, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| &> 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Следовательно (см., теорему 4.21), оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов.

Докажем теперь, что индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  равен индексу оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Пусть вектор-функция  $W(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  принадлежит множеству  $N(\mathcal{D})$  нулей оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ . Нетрудно видеть, что для всех  $x \in \Omega$  справедливо равенство

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4.34)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q})$  нулей оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ :

$$W(x) = V(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.35)$$

По определению оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  имеем для всех  $x \in \mathbb{R}^2$  следующее равенство:

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = W(x) + \frac{1}{2}\eta(x)W(x) - \quad (4.36)$$

$$-p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy - \quad (4.37)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy. \quad (4.38)$$

Из двух последних равенств, учитывая то, что  $n(x) = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty$ , получаем представление вектор-функции  $W(x)$  для  $x \in \Omega_\infty$  через  $V(x)$ :

$$W(x) = p(x) \int_{\Omega} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy + \quad (4.39)$$

$$+ \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy. \quad (4.40)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}) = \dim N(\mathcal{Q}). \quad (4.41)$$

Пусть теперь вектор-функция  $W^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  принадлежит множеству  $N(\mathcal{D}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Учитывая явный вид этого оператора (4.25) – (4.27), получим

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = W^*(x) = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (4.42)$$

Из этого равенства и равенств (4.25) – (4.27), (4.21) имеем:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = (\mathcal{Q}^*(\beta)W^*)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4.43)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W^*(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ :

$$W^*(x) = V^*(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.44)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}^*). \quad (4.45)$$

Окончательно, используя (4.41) и (4.45), для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  имеем равенство индексов оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  и оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ :

$$\text{Ind} \mathcal{D} = \dim N(\mathcal{D}) - \dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}) - \dim N(\mathcal{Q}^*) = \text{Ind} \mathcal{Q}. \quad (4.46)$$

Согласно доказанному выше, индекс оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ .

Оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов, а значит, нормально разрешим. Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  также нормально разрешим. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = W^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.47)$$

где вектор правой части  $W^0$  ортогонален множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ . Пусть вектор-функция  $U^0 \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  совпадает с вектор-функцией  $W^0(x)$  для всех  $x \in \Omega$  и тождественно равна нулю в  $\Omega_\infty$ . Используем представления (4.42), (4.44) для нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  и придем к заключению, что вектор-функция  $U^0$  ортогональна множеству нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Следовательно, в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  существует решение  $U \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  уравнения

$$(\mathcal{D}(\beta)U)(x) = U^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.48)$$

Представим вектор-функцию  $U(x)$  в виде суммы двух вектор-функций:

$$U(x) = V(x) + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4.49)$$

где  $V(x) = 0$  при  $x \in \Omega$ , а  $W(x) = 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . Заметим, что для такой вектор-функции  $W(x)$  справедливо равенство (4.34), а вектор-функция  $U(x)$  удовлетворяет уравнению (4.48). Следовательно, при  $x \in \Omega$  имеем цепочку равенств

$$W^0(x) = U^0(x) = \quad (4.50)$$

$$= (\mathcal{D}(\beta)U)(x) = (\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.51)$$

Таким образом, для любой вектор-функции  $W^0$ , ортогональной множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , существует решение  $W$  из  $(L_2(\Omega))^3$  уравнения (4.47). А это значит, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Итак, для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим, индекс его равен нулю, следовательно, по определению он фредгольмов.  $\square$

**Определение 4.15.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , если выполнено уравнение

$$\mathcal{Q}(\beta)F = 0. \quad (4.52)$$

**Теорема 4.23.** Пусть  $\{E, H\} \in U^6$  — собственный вектор задачи (4.9) – (4.11), отвечающий собственному значению  $\beta_0 \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3, \quad x \in \Omega,$$

— собственный вектор оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающий тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ .

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4.4.

**Приложение А.** Приведем явный вид функций

$$R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda), \quad \alpha = t, n, c$$

для  $(x, y) \in \Omega_2^2$ . Способ их построения методом преобразования Фурье изложен, например, в статье [37]:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{R_t^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_t^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_t^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_t^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^H}, \\ R_n &= \frac{R_n^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_n^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_n^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_n^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E}, \\ R_c &= \frac{R_c^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_c^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_c^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_c^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E Z^H}. \end{aligned}$$

Для трехслойной геометрии

$$\begin{aligned} Z^H(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d} - \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), \\ Z^E(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d} \\ &\quad - \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right), \end{aligned}$$

$$R_t^1(\beta, \lambda) = R_t^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^3(\beta, \lambda) = \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^4(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d},$$

$$R_n^1(\beta, \lambda) = R_n^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right),$$

$$R_n^3(\beta, \lambda) = \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right),$$

$$R_n^4(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d},$$

$$R_c^1(\beta, \lambda) = e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^2(\beta, \lambda) = e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^3(\beta, \lambda) = \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right),$$

$$R_c^4(\beta, \lambda) = \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{4p_2 d} - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right),$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad \text{Re}(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$

Приведем явный вид функций  $R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda)$ ,  $\alpha = t, n, c$  для трехслойной геометрии и  $y \in \Omega_2$ ,  $x \in \Omega_1$ :

$$R_t = e^{-p_1(x_2-d)} \left( e^{-p_2 y_2} + \frac{1}{R_{32}^t} e^{p_2 y_2} \right) \frac{1}{T_{12}^t F^t} \left( R_{21}^t + \frac{1}{R_{12}^t} \right) e^{p_2 d},$$

$$R_n = e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{p_2 y_2} \left( \frac{e^{-p_2 d} + \Lambda_{33}^n e^{p_2 d}}{F_n} + e^{-p_2 d} \right) + e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{-p_2 y_2} e^{p_2 d} \frac{(1 + \Lambda_{11}^n)}{F_n},$$

$$R_c = e^{-p_1(x_2-d)} (e^{p_2 y_2} C_1 + e^{-p_2 y_2} C_2),$$



$$C_1 = \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{p_2 d} (1 + \Lambda_{11}^n) + b_5 \frac{1}{R_{32}^t} (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),$$

$$C_2 = \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{3p_2 d} \frac{1}{R_{12}^t} (1 + \Lambda_{11}^n) + (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),$$

$$F^t = e^{2p_2 d} \frac{1}{R_{32}^t} \frac{1}{R_{12}^t} - 1,$$

$$F_n = e^{2p_2 d} \Lambda_{33}^n \Lambda_{11}^n - 1,$$

$$a_5 = \frac{(N_{32}^2 - 1) \left( \frac{p_2 + p_3}{p_2 - p_3} + \frac{p_3 - p_2}{p_3 + p_2} \right)}{\frac{2p_3}{p_3 + p_2} F^t (N_{32}^2 p_2 - p_3)},$$

$$b_5 = \frac{N_{12}^2 (N_{21}^2 - 1) \left( \frac{2p_2}{p_2 - p_1} \right) e^{p_2 d}}{F^t (p_2 N_{12}^2 - p_1)},$$

$$\Lambda_{33}^n = \frac{N_{32}^2 p_2 + p_3}{N_{32}^2 p_2 - p_3}, \quad \Lambda_{11}^n = \frac{N_{12}^2 p_2 + p_1}{N_{12}^2 p_2 - p_1},$$

$$T_{\alpha\beta}^t = \frac{2N_{\alpha\beta}^2 p_\alpha}{p_\alpha + p_\beta}, \quad R_{\alpha\beta}^t = \frac{p_\beta - p_\alpha}{p_\beta + p_\alpha},$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad \text{Re}(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$

### Задачи и упражнения

1. *Задача о собственных волнах планарного диэлектрического волновода [22].* Планарным диэлектрическим волноводом называется волновод, состоящий из параллельных слоев диэлектрика. Пусть все трехмерное пространство занято изотропной средой без источников, и пусть показатель преломления  $n$  является положительной вещественной функцией не зависящей от продольной координаты  $x_3$  и поперечной координаты  $x_1$ . Для определенности положим

$$n = n(x_2) = \begin{cases} n_\infty, & x_2 > d, \\ n_+ > n_\infty, & -d < x_2 < d, \\ n_\infty, & x_2 < -d. \end{cases}$$

В силу однородности среды вдоль оси  $Ox_1$  амплитуды собственных волн планарного волновода не зависят от переменной  $x_1$ . Кроме

того, собственные волны планарных волноводов распадаются на два класса:  $E$ -волны и  $H$ -волны.  $E$ -волны лишены продольной магнитной компоненты ( $H_z = 0$ ).  $H$ -волны лишены продольной электрической компоненты ( $E_z = 0$ ).

При сделанных предположениях получите характеристические уравнения для определения постоянных распространения поверхностных собственных волн планарного диэлектрического волновода в случаях  $E$  и  $H$  поляризации поля. Напишите компьютерную программу, предназначенную для вычисления корней этих уравнений. Постройте дисперсионные кривые аналогичные, изображенным на рисунке 2, с. 34.

2. Проверьте, что функция (4.18) является решением задачи (4.14) – (4.17).

3. Постройте интегральное представление, аналогичное представлению (4.20) в частном случае однородной окружающей среды, т.е. при  $n_1 = n_2 = n_3$ .

---

---

ГЛАВА 5

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

**§ 1. Проекционные методы решения нелинейных  
спектральных задач**

Для численного решения задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектральных параметров в интегральные операторы (2.25), с. 52, и (2.61), с. 65, применим метод Галеркина. Теоретическое обоснование сходимости метода проведем на основе общих результатов статьи [2], посвященной исследованию сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач. Приведем некоторые определения и необходимые нам формулировки теорем из этой работы.

Пусть даны банаховы пространства  $U$  и  $U_n$ ,  $n \in N$ , где  $N$  — множество всех натуральных чисел. Через  $N'$ ,  $N''$  и т. д. будем обозначать бесконечные подмножества множества натуральных чисел  $N$ . Под сходимостью  $z_n \rightarrow z$ ,  $n \in N'$  будем понимать сходимость при  $n \rightarrow \infty$ , когда индекс  $n$  пробегает множество  $N'$ . Пусть операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$  удовлетворяют условиям

$$\|p_n u\|_{U_n} \rightarrow \|u\|_U, \quad n \in N, \quad \forall u \in U, \quad (5.1)$$

$$\|p_n(\alpha u + \alpha' u') - (\alpha p_n u + \alpha' p_n u')\|_{U_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall u, u' \in U, \quad (5.2)$$

где  $\alpha, \alpha'$  — произвольные комплексные константы.

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$ , где  $u_n \in U$ , называется дискретно сходящейся к пределу  $u \in U$ , если  $\|u_n - p_n u\| \rightarrow 0$ ,  $n \in N'$ . Будем обозначать это так:  $u_n \rightarrow u$ ,  $n \in N'$ .

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$  называется дискретно компактной или  $P$ -компактной, если для каждого  $N'' \subseteq N'$  существует такое подмножество  $N''' \subseteq N''$ , что последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'''}$  сходится к некоторому пределу  $u \in U$ .

Пусть даны банаховы пространства  $V$  и  $V_n$ ,  $n \in N$  и операторы  $q_n : V \rightarrow V_n$ , удовлетворяющие условиям

$$\|q_n v\|_{V_n} \rightarrow \|v\|_V, \quad n \in N, \quad \forall v \in V, \quad (5.3)$$

$$\|q_n(\alpha v + \alpha' v') - (\alpha q_n v + \alpha' q_n v')\|_{V_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall v, v' \in V, \quad (5.4)$$

где  $\alpha, \alpha'$  — произвольные комплексные константы. Аналогично приведенным выше определениям вводятся понятия  $Q$ -сходимости и  $Q$ -компактности.

Пусть даны некоторые операторы  $A : U \rightarrow V$  и  $A_n : U_n \rightarrow V_n$ . Будем говорить, что последовательность операторов  $\{A_n\}_{n \in N'}$  собственно сходится к оператору  $A$ , если выполнены условия

$$u_n \rightarrow u, \quad n \in N' \Rightarrow A_n u_n \rightarrow A u, \quad n \in N', \quad (5.5)$$

$$\|u_n\| \leq \text{const}, \quad \{A_n u_n\}_{n \in N'} \text{ } Q\text{-компактна} \Rightarrow \{u_n\}_{n \in N'} \text{ } P\text{-компактна.} \quad (5.6)$$

Обозначим через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : V \rightarrow U\}$  множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$  — множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$ ;

$$\rho(A_n) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A_n(\beta)^{-1} : V_n \rightarrow U_n\}, \quad \sigma(A_n) = \Lambda \setminus \rho(A_n).$$

Справедливы следующие теоремы [2].

**Теорема 5.24.** *Предположим, что при  $n \in N$  выполнены следующие условия.*

1. Операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$ ,  $q_n : V \rightarrow V_n$  удовлетворяют условиям (5.1), (5.2) и (5.3), (5.4).

2.  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости,  $A(\beta) : U \rightarrow V$  и  $A_n(\beta) : U_n \rightarrow V_n$  — голоморфные на  $\Lambda$  оператор-функции.

3. При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$ ,  $A_n(\beta)$  фредгольмовы.

4.  $A_n(\beta) \rightarrow A(\beta)$  собственно  $\forall \beta \in \Lambda$ .

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ .

6. Множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Пусть  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , тогда существует такая последовательность точек  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  —

некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$  и  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .

**Теорема 5.25.** *Предположим, что выполнены условия 1 – 6 теоремы 5.24. Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , и  $\{u_n\}_{n \in N}$  – некоторая последовательность нормированных векторов  $\|u_n\| = 1$ , таких, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)u_n = 0$  и  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\| = 1$ .*

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

## § 2. Метод Галеркина решения задач о собственных волнах

**1. Метод Галеркина решения задачи со слабосингулярным оператором.** Опишем численный метод решения задачи (2.25), с. 52. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.25) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = W_2^1 \times L_2.$$

При этом будем использовать известное (см., напр., [7], с. 10) выражение для оператора  $L^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2$

$$L^{-1}(u; t) = \frac{c_0(u)}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in W_2^1, \quad (5.7)$$

где

$$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$$

— коэффициенты Фурье функции  $u$ . Отметим, что

$$\|L^{-1}\| = 2. \quad (5.8)$$

Приближенное решение  $w_n = (w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$  уравнения (2.25) будем искать в виде

$$w_n^{(j)}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина:

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(k)}(t) e^{-ijt} dt = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad k = 1, 2. \quad (5.9)$$

В силу (5.7) имеем

$$L^{-1}(w_n^{(1)}; t) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-n}^n |k| \alpha_k^{(1)} e^{ikt},$$

поэтому равенства (5.9) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_j^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad (5.10)$$

$$\alpha_j^{(2)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n. \quad (5.11)$$

Здесь  $d_j = \{1/\ln 2 \text{ при } j = 0, 2|j| \text{ при } j \neq 0\}$ ,

$$h_{jk}^{(l,m)}(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(l,m)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau.$$

Напомним, что ядра  $h^{(l,m)}$  не имеют особенности при  $t = \tau$ . Таким образом, применение метода Галеркина с тригонометрическим базисом позволяет обратить главную часть сингулярных операторов аналитически.

Пусть  $H_n^T$  — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов вида  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$ ,  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)} \in H_n^T$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$ :

$$p_n w = (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}), \quad w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in H, \quad (5.12)$$

где  $\Phi_n$  — оператор Фурье:

$$\Phi_n(u; t) = \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Ясно, что

$$\|p_n\| = 1. \quad (5.13)$$

Система линейных алгебраических уравнений (5.10), (5.11) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n(\beta)w_n \equiv p_n A(\beta)w_n \equiv (I + p_n B(\beta))w_n \equiv (I + B_n(\beta))w_n = 0. \quad (5.14)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  — единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Обозначим  $\sigma(A_n)$  множество сингулярных точек оператора  $A_n(\beta)$ . Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.26.** *Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такая последовательность чисел  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Если  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{w_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство теоремы заключается в проверке условий 1 – 6 теорем 5.24 и 5.25 в рассматриваемом случае.

1. Оператор  $p_n : H \rightarrow H_n$  обладает свойствами (5.1), (5.2). Первое свойство выполняется в силу очевидных предельных соотношений

$$\|\Phi_n u\| \rightarrow \|u\|, \quad n \in N, \quad u \in L_2, \quad W_2^1.$$

Второе — очевидное следствие линейности оператора  $p_n$ .

2. Оператор-функции  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  голоморфны на  $\Lambda$ . Голоморфность оператор-функции  $A(\beta)$  доказана в теореме 2.4. Следовательно, таким же свойством обладает и  $A_n(\beta) = p_n A(\beta)$ .

3. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности оператора

$$B(\beta) : H \rightarrow H$$

и конечномерности оператора  $B_n(\beta)$  при  $\beta \in \Lambda$ .

4. Для любого  $\beta \in \Lambda$  последовательность операторов  $\{A_n(\beta)\}_{n \in N}$  собственно сходится к оператору  $A(\beta)$ . Для доказательства этого утверждения проверим, выполняются ли условия (5.5), (5.6).

Имеет место оценка

$$\|A(\beta)\| \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (5.15)$$

где  $c(\beta)$  — непрерывная в области  $\Lambda$  функция:

$$c(\beta) = 1 + 2(c_{11}^2(\beta) + d_{11}^2(\beta))^{1/2} + (c_{12}^2(\beta) + d_{12}^2(\beta))^{1/2} + 2c_{21}(\beta) + c_{22}(\beta).$$

Здесь

$$c_{ij}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)|^2 dt dt_0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$d_{1j}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h^{(1,j)}(\beta; t, t_0) \right|^2 dt dt_0, \quad j = 1, 2.$$

Справедливость оценки (5.15) следует из неравенства

$$\|A(\beta)\| \leq 1 + (\|B^{(1,1)}(\beta)\| + \|B^{(2,1)}(\beta)\|) \|L^{-1}\| + \|B^{(1,2)}(\beta)\| + \|B^{(2,2)}(\beta)\|,$$

равенства (5.8) и очевидных оценок

$$\|B^{(2,j)}(\beta)\| \leq c_{2,j}(\beta), \quad B^{(2,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow L_2,$$

$$\|B^{(1,j)}(\beta)\|^2 \leq c_{1,j}^2(\beta) + d_{1,j}^2(\beta), \quad B^{(1,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow W_2^1, \quad j = 1, 2.$$

Из определения оператора  $A_n(\beta)$  и равенства (5.13) вытекает

$$\|A_n(\beta)\| \leq \|A(\beta)\|, \quad n \in N, \quad \beta \in \Lambda. \quad (5.16)$$

$P$ -сходимость  $\{w_n\}_{n \in N}$  к  $w \in H$ , означает, что

$$\|w_n - p_n w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Справедливость условия (5.5) вытекает, таким образом, из оценки

$$\|A_n w_n - p_n A w\| \leq \|A_n\| \|w_n - p_n w\| + \|p_n\| \|A\| \|p_n w - w\|, \quad n \in N,$$

оценок (5.15), (5.16), равенства (5.13) и очевидного предельного соотношения

$$\|p_n w - w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Проверим условие (5.6).  $P$ -компактность последовательности векторов  $\{A_n w_n\}_{n \in N}$  означает, что для любого  $N' \subseteq N$  существует такое  $N'' \subseteq N'$ , что последовательность  $\{A_n w_n = w_n + B_n w_n\}_{n \in N''}$   $P$ -сходится к  $z \in H$ . Если  $\|w_n\| \leq \text{const}$ ,  $n \in N''$ , то существует слабо сходящаяся подпоследовательность  $\{w_n\}_{n \in N'''}$ ,  $N''' \subset N''$ . Вполне



непрерывный оператор  $B$ , как известно, переводит ее в сильно сходящуюся:

$$\|Bw_n - u\| \rightarrow 0, \quad n \in N''', \quad u \in H.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|B_n w_n - p_n u\| \leq \|p_n\| \|Bw_n - u\|$$

и равенства (5.13) следует, что последовательность  $\{B_n w_n\}_{n \in N'''} P$ -сходится к  $u \in H$ . Таким образом,  $\{w_n\}_{n \in N'''} P$ -сходится к вектору  $w = z - u \in H$ , и условие (5.6) выполнено.

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (5.15) и (5.16).

6. Множество  $\rho(A)$  не пусто, то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ . Справедливость этого утверждения доказано в теореме 2.6, с. 54.  $\square$

## 2. Метод Галеркина решения задачи с ядром Гильберта.

Опишем теперь численный метод решения задачи (2.61), с. 65. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.61) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = L_2 \times L_2 \times L_2 \times L_2.$$

Уравнение (2.61), по сравнению с уравнением (2.25), помимо интегральных операторов с гладкими ядрами и оператора  $L$  с логарифмической особенностью ядра, содержит оператор  $S$  с ядром Гильберта (2.60). Будем использовать известное выражение (см., напр., [8]) для оператора  $S^{-1} : L_2 \rightarrow L_2$

$$S^{-1}(u; t) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign}(k) c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in L_2, \quad (5.17)$$

где

$$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ikt\tau} d\tau$$

— коэффициенты Фурье функции  $u$ . При этом мы полагаем, что  $\text{sign}(0)=1$ . Известно также, что

$$S^{-1} = -S, \quad \|S^{-1}\| = \|S\| = 1. \quad (5.18)$$

Приближенное решение  $w_n = (w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$  уравнения (2.61) будем искать в виде

$$w_n^{(j)}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина:

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(j)}(t) e^{-ikt} dt = 0, \quad k = -n, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.19)$$

В силу (5.7) и (5.17) действие операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  на базисные функции выражается в явном виде (тригонометрические функции являются собственными функциями этих операторов, отвечающими известным собственным значениям). Равенства (5.19) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора  $\{\alpha_k^{(j)}\}$ ,  $k = -n, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Элементы матрицы этой системы определяются собственными значениями операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  и интегралами вида

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+/\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau, \quad l = 1, 2, 3$$

от функций  $h_{+/\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau)$ , не имеющих особенности при  $t = \tau$ .

Исследуем сходимость метода Галеркина. Пусть  $H_n^T$  — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$ , где  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)} \in H_n^T$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$

$$p_n w = (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}, \Phi_n w^{(3)}, \Phi_n w^{(4)}),$$

$$w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)}) \in H,$$

где  $\Phi_n$  — оператор Фурье

$$\Phi_n(u; t) = \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Ясно, что

$$\|p_n\| = 1.$$

Система уравнений метода Галеркина (5.19) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n(\beta)w_n \equiv p_n A(\beta)w_n \equiv (I + p_n B(\beta))w_n \equiv (I + B_n(\beta))w_n = 0. \quad (5.20)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  — единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Обозначим  $\sigma(A_n)$  множество сингулярных точек оператора  $A_n(\beta)$ . Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода, справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 5.26.

**Теорема 5.27.** *Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такая последовательность чисел  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Если  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{w_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .*

### § 3. Численные эксперименты

**1. Метод обратных итераций с невязкой решения нелинейных конечномерных спектральных задач.** В предыдущем параграфе методом Галеркина для численного решения задач (2.2) – (2.5), с. 42, и (2.29) – (2.32), с. 55, были построены конечно-мерные нелинейные спектральные задачи вида

$$A(\beta)u = 0, \quad (5.21)$$

где  $A$  — матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями комплексного параметра  $\beta$ ,  $u$  — собственный вектор с комплексными компонентами. Для решения этих задач можно использовать вариант метода обратных итераций с невязкой, предложенный в работе [46]. Приведем алгоритм этого метода, следуя [46].

Пусть известно некоторое приближение  $\sigma \in \Lambda$  (где  $\Lambda$  — область на комплексной плоскости) к искомому характеристическому значению  $\beta$  такое, что матрица  $A(\sigma)$  обратима. Обозначим  $\|u\|$  максимум норму вектора  $u$ ,  $e(u)$  — единичный вектор с единицей в позиции максимального по модулю значения вектора  $u$ . Алгоритм приближенного

решения нелинейной спектральной задачи (5.21) состоит в следующем.

Шаг 1. Пусть  $l = 0$ . Выберем начальное приближение  $u^{(0)}$  к  $u$ .

Шаг 2. Вычислим очередное приближение  $\beta_{l+1}$  к характеристическому значению  $\beta$ , как ближайший к значению  $\beta_l$  корень уравнения

$$\left( e(u^{(l)}), A^{-1}(\sigma)A(\beta_{l+1})u^{(l)} \right) = 0.$$

Шаг 3. Вычислим невязку

$$r^{(l)} = A(\beta_{l+1})u^{(l)}.$$

Шаг 4. Решим следующее уравнение

$$A(\sigma)\hat{u}^{(l)} = r^{(l)}.$$

Вычислим очередное приближение  $u^{(l+1)}$  к собственному вектору  $u$

$$\bar{u}^{(l+1)} = u^{(l)} - \hat{u}^{(l)}, \quad u^{(l+1)} = \bar{u}^{(l+1)} / \|\bar{u}^{(l+1)}\|.$$

Шаг 5. Итерационный процесс останавливается, если относительная ошибка характеристического значения достигает заданной точности  $\varepsilon$ :

$$\frac{|\beta_{l+1} - \beta_l|}{|\beta_l|} \leq \varepsilon.$$

В противном случае увеличим  $l$  на единицу и вернемся к шагу 2.

Относительно сходимости этого метода справедлива следующая теорема [46].

**Теорема 5.28.** Пусть элементы матрицы  $A(\beta)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями параметра  $\beta \in \Lambda$ . Пусть вектор  $u$  является нормализованным собственным вектором, отвечающим простому (в геометрическом смысле) изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (5.21). Тогда метод обратных итераций с невязкой решения задачи (5.21) сходится для любого начального приближения  $\sigma$ , достаточно близкого к  $\beta$ . Справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|u^{(l+1)} - u\| / \|u^{(l)} - u\| = O(\sigma - \beta), \quad |\beta_{l+1} - \beta| = O(\|u^{(l)} - u\|).$$

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность. В рассматриваемых нами случаях решения задач (2.2) – (2.5), с. 42, и (2.29) – (2.32), с. 55 описанным методом, элементы матрицы  $A(\beta)$  являются аналитическими

функциями параметра  $\beta$  на римановой поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, предположение теоремы 5.28 о гладкости элементов матрицы  $A(\beta)$  выполняется.

В теореме 5.28 доказана сходимость метода в случае поиска собственного вектора, отвечающего простому изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (5.21). Однако, метод обратных итераций с невязкой можно применять и для поиска собственных векторов отвечающих характеристическим значениям  $\beta$  кратности равной двум. Такая ситуация возникает, когда одному значению постоянной распространения  $\beta$  соответствуют две собственные волны. Это справедливо, например, для основных волн волноводов кругового и квадратного поперечного сечений. Хотя в этих случаях теорема 5.28 и не гарантирует сходимости, наблюдается устойчивая сходимость метода. При этом на первом шаге алгоритма следует выбирать два ортогональных друг другу начальных приближения.

**2. Результаты вычислений.** Приведем результаты численного решения ряда конкретных спектральных задач теории диэлектрических волноводов, подтверждающие практическую эффективность предлагаемых методов.

Задача (2.29) – (2.32), с. 55 решалась для волноводов кругового и квадратного сечений, то есть для таких волноводов, для которых либо известны точные решения, либо имеются экспериментальные данные, а также результаты вычислений, полученные другими методами.

Ранее метод интегральных уравнений для численного решения задачи (2.29) – (2.32) применялся в работах [11] и [21] в частном случае поиска поверхностных собственных волн, амплитуды которых экспоненциально затухают на бесконечности, а постоянные распространения  $\beta$  лежат в интервале  $(kn_\infty, kn_+)$ . Для аппроксимации построенных с помощью формулы Грина систем интегродифференциальных уравнений с логарифмической особенностью ядер в [11], [21] применялся метод механических квадратур. При вычислении несобственных интегралов в [21] особенности ядер выделялись аналитически, а в [11] — численно, путем сгущения сетки. В качестве тестового примера в [11], [21] решалась задача о поиске постоянных распространения поверхностных собственных волн волновода кругового сечения. В этом случае точные значения постоянных распространения  $\beta$  определяются как корни характеристических уравнений (1.88), с. 33.

В наших расчетах значения параметров задачи были выбраны

такими же, как в [11]:  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $kR = 4$ . В этом случае уравнения (1.88) имеют корни  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$  лишь при  $l = 0, 1, 2$ . Всего таких корней пять. Результаты вычислений ( $h = \beta/k$ ) представлены в следующей таблице:

$l$	0	0	1	1	2
$h$	1.200026	1.164818	1.020626	1.320590	1.167256
	1.200026	1.164819	1.020628	1.320590	1.167256
	1.1995	1.1643	1.0216	1.3202	1.1870

В первой строке таблицы помещены номера  $l$  уравнений (1.88), во второй — корни этих уравнений, в третьей — решения, полученные с помощью метода Галеркина (5.19), в четвертой — результаты работы [11]. Результаты наших вычислений, представленные в таблице, получены при использовании пяти базисных функций в методе Галеркина (5.19). Дальнейшее увеличение их числа не привело к изменению точности вычислений. Отметим, что в [11] вычисления фактически сводились к поиску характеристических значений задачи вида (5.21) с матрицей размерности равной 64, в наших расчетах матрица имеет размерность равную 20. В [21] точность аналогичных вычислений составила 0,1 процента.

Решение задачи (2.29) – (2.32) для волновода квадратного сечения было основано на аппроксимации контура  $\Gamma$  кривой (см., напр., [38]):

$$r(t) = \left( \left( \frac{\cos t}{a} \right)^{2m} + \left( \frac{\sin t}{a} \right)^{2m} \right)^{-1/2m}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.22)$$

При  $m = 1$  эта кривая представляет собой окружность радиуса  $a$ , а при  $m \rightarrow \infty$  она стремится к квадрату со стороной  $2a$ .

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными из работы [14]. Как и в [14], были получены дисперсионные кривые, показывающие зависимость величины  $h = \beta/k$  от  $p = ka/\pi$  при фиксированных  $n_+ = \sqrt{2.08}$ ,  $n_\infty = 1$ . Результаты расчетов представлены на рисунке 1, с. 122, сплошной линией. Квадратиками на рисунке 1 обозначены экспериментальные данные из работы [14].

Разыскивались также собственные векторы задачи (2.29) – (2.32), отвечающие комплексным собственным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$ . Для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  результаты сравнивались с результатами, полученными в статье [40]. В этой работе применялся итерационный метод, предложенный в [41], суть которого

заключается в том, что приближенное решение задачи ищется в виде разложения по собственным векторам симметричной части соответствующего ей дифференциального оператора. Теоретического обоснования сходимости этого метода получено не было.

Следуя [40], были построены дисперсионные кривые для комплексных собственных значений — графики зависимости вещественной и мнимой части параметра  $h = \beta/(kn_\infty)$  от  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  при фиксированном значении  $(n_+^2 - n_\infty^2)/(2n_\infty^2) = 30$ . Результаты вычислений представлены на рисунке 2, с. 122. Непрерывными линиями изображены точные решения, полученные как корни уравнения (1.88) с номером  $l = 1$  (верхний график —  $\text{Im}(h)$ , нижний —  $\text{Re}(h)$ ). Кружочками на рисунке 2 отмечены результаты наших вычислений, которые с графической точностью совпали с результатами работы [40]. На рисунках 3 и 4 изображены линии уровня функций  $|E_3|$  и  $|H_3|$  соответственно при  $V = 2$ .

Помимо комплексных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, для демонстрации эффективности предлагаемого метода разыскивались также комплексные собственные волны диэлектрического волновода квадратного поперечного сечения. На рисунке 2 квадратиками отмечены значения  $\text{Im}(h)$  и  $\text{Re}(h)$ , а на рисунках 5 и 6 при  $V = 2$  изображены линии уровня функций  $|E_3|$  и  $|H_3|$  для волновода квадратного сечения.

Для демонстрации внутренней сходимости метода было изучено поведение функции

$$e(M) = \frac{\|\alpha(M) - \alpha(M + 10)\|}{\|\alpha(M + 10)\|},$$

где  $\alpha$  — вектор коэффициентов метода Галеркина (5.19),  $M$  — число базисных функций этого метода. На рисунке 7 для различных значений параметра  $m$ , определяющего степень аппроксимации квадрата гладкой кривой (5.22), изображены графики функции

$$\max_h e(M),$$

где максимум брался по параметру  $h$ , принадлежавшему множеству тех значений  $h$ , для которых были получены дисперсионные кривые, изображенные на рисунках 1 и 2.

Отметим, что все остальные вычисления, а именно, вычисление коэффициентов метода Галеркина (5.19) стандартным методом, основанным на алгоритме быстрого преобразования Фурье, вычисление

характеристических значений и собственных векторов конечномерных нелинейных спектральных задач методом обратных итераций с невязкой проводились с точностью  $10^{-9}$ . Результаты вычислений для волновода квадратного поперечного сечения, изображенные на рисунках 1, 2, 5 и 6 получены при  $m = 20$  и  $M = 201$ . Отметим также, что результаты вычислений для волновода кругового поперечного сечения, изображенные на рисунках 2, 3 и 4, получены при  $M = 3$ , а дальнейшее увеличение  $M$  не повлияло на точность вычислений.

### Задачи и упражнения

1. Разработайте алгоритм численного решения задач (2.62), (2.63) и (2.62), (2.64), стр. 68, о  $E$  и  $H$ -поляризованных собственных волнах металлического волновода произвольного поперечного сечения, основанный на дискретизации интегральных операторов, построенных в ходе решения задачи 2, стр. 67, методом Галеркина. В качестве базисных используйте тригонометрические функции.

Напишите компьютерную программу, реализующую разработанный алгоритм. Постройте дисперсионные кривые аналогичные, изображенным на рисунке 2, стр. 34, для волноводов кругового и квадратного поперечного сечения. Сравните приближенные решения с точными, полученными в ходе решения задач 4 и 5, стр. 38. Исследуйте скорость сходимости разработанного алгоритма в зависимости от числа базисных функций.

2. Проверьте справедливость следующих формул:

$$\int_0^{2\pi} e^{ims} H_0^{(1)} \left( 2z \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right) ds = \quad (5.23)$$

$$= 2\pi e^{imt} J_m(z) H_m^{(1)}(z), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ims} \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| H_1^{(1)} \left( 2z \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right) ds = \quad (5.24)$$

$$= -2\pi e^{imt} \frac{d}{dz} \left( J_m(z) H_m^{(1)}(z) \right), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ims} \frac{\sin(t-s)}{\left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( 2z \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right) ds = \quad (5.25)$$



$$= \frac{4\pi m}{iz} e^{imt} J_m(z) H_m^{(1)}(z), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

3. Разработайте алгоритм численного решения задачи (2.2) – (2.5), стр. 43 о собственных волнах слабонаправляющего волновода с постоянным показателем преломления и произвольным гладким контуром поперечного сечения, основанный на дискретизации интегральных операторов, построенных в ходе решения задачи 4, стр. 67 методом Галеркина. В качестве базисных используйте тригонометрические функции. Используйте формулы (5.23), (5.24).

Напишите компьютерную программу, реализующую разработанный алгоритм. Постройте дисперсионные кривые, изображенные на рисунке 4, стр. 37 для волновода кругового поперечного сечения, а также аналогичные кривые для волновода квадратного поперечного сечения. Сравните приближенное решение с точным, полученным для волновода кругового сечения в ходе решения задачи 3, стр. 38. Исследуйте скорость сходимости разработанного алгоритма в зависимости от числа базисных функций.

4. Разработайте алгоритм численного решения задачи (2.29) – (2.32), стр. 56 о собственных волнах волновода с постоянным показателем преломления и произвольным гладким контуром поперечного сечения, основанный на дискретизации интегральных операторов, построенных в ходе решения задачи 5, стр. 67 методом Галеркина. В качестве базисных используйте тригонометрические функции. Используйте формулы (5.23) – (5.25).

Напишите компьютерную программу, реализующую разработанный алгоритм. Постройте дисперсионные кривые, изображенные на рисунках 2, стр. 34 и 3, стр. 35 для волновода кругового поперечного сечения, а так же аналогичные кривые для волновода квадратного поперечного сечения. Сравните приближенное решение с точным, полученным для волновода кругового сечения в ходе решения задачи 2, стр. 38. Исследуйте скорость сходимости разработанного алгоритма в зависимости от числа базисных функций.

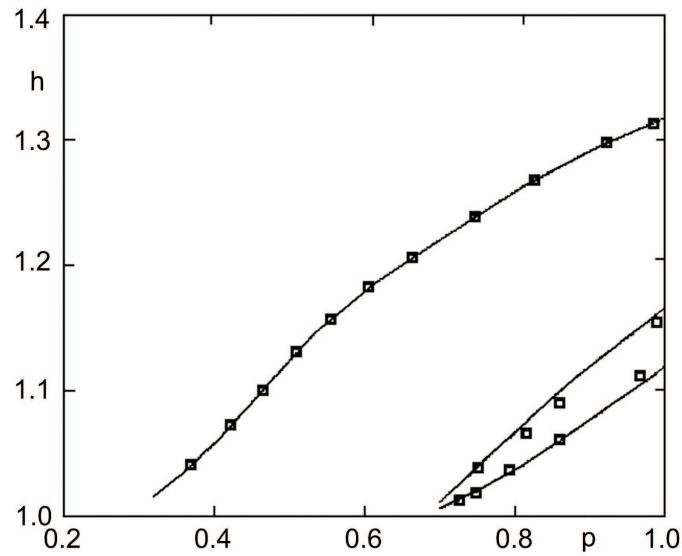


Рис. 1. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения,  $h = \beta/k$ ,  $p = ka/\pi$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом Галеркина. Квадратиками обозначены экспериментальные данные [14]

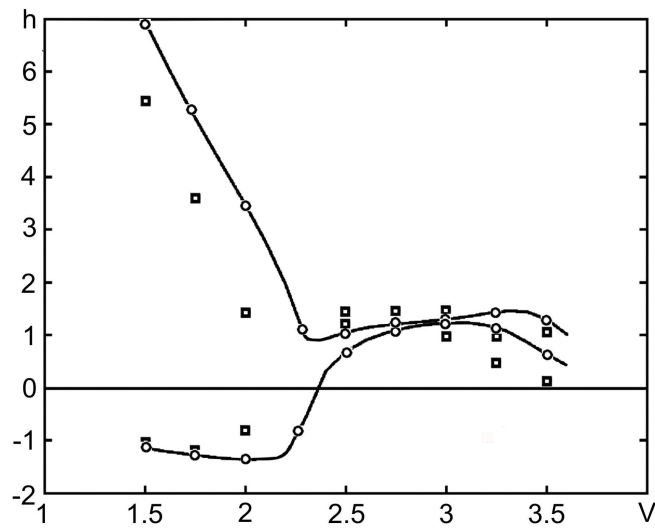


Рис. 2. Дисперсионные кривые для комплексных собственных волн,  $h = \beta/(kn_\infty)$ ,  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  (верхний график —  $\text{Im}(h)$ , нижний —  $\text{Re}(h)$ ). Сплошные линии — точные решения для волновода кругового сечения. Кругочками и квадратиками обозначены результаты расчетов методом Галеркина для волноводов кругового и квадратного поперечного сечения соответственно

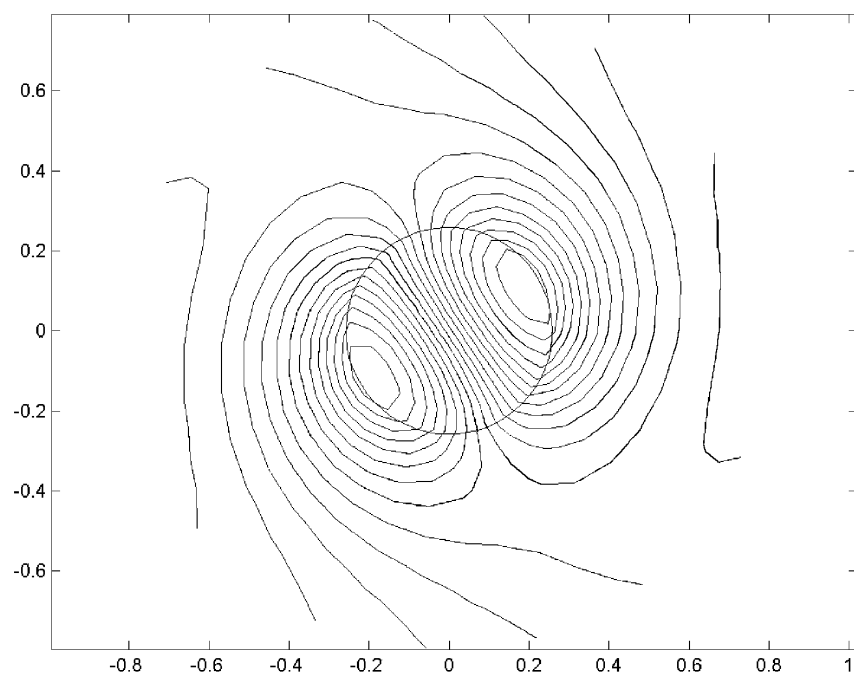


Рис. 3. Линии уровня функции  $|E_z|$  для волновода кругового поперечного сечения

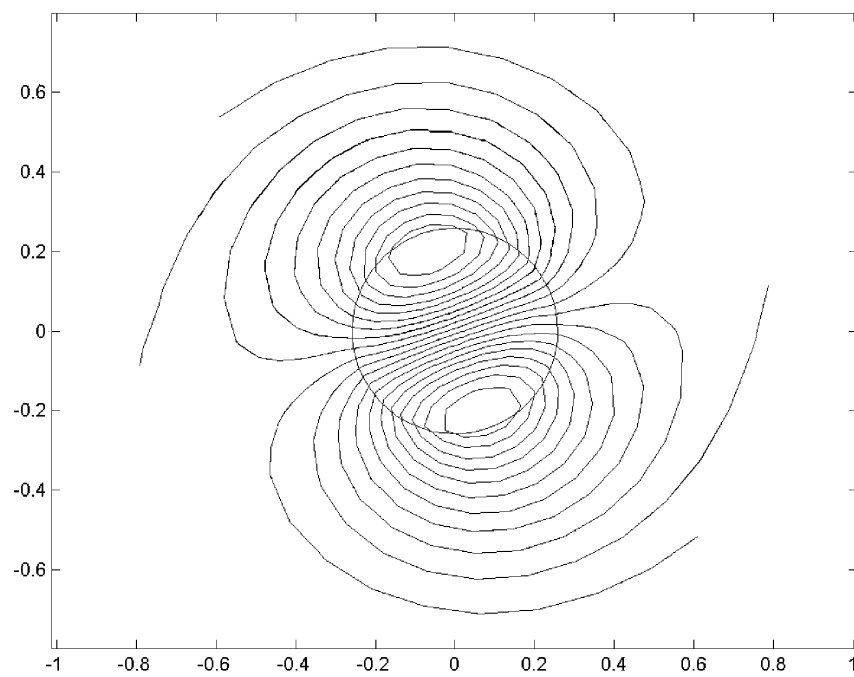


Рис. 4. Линии уровня функции  $|H_z|$  для волновода кругового поперечного сечения

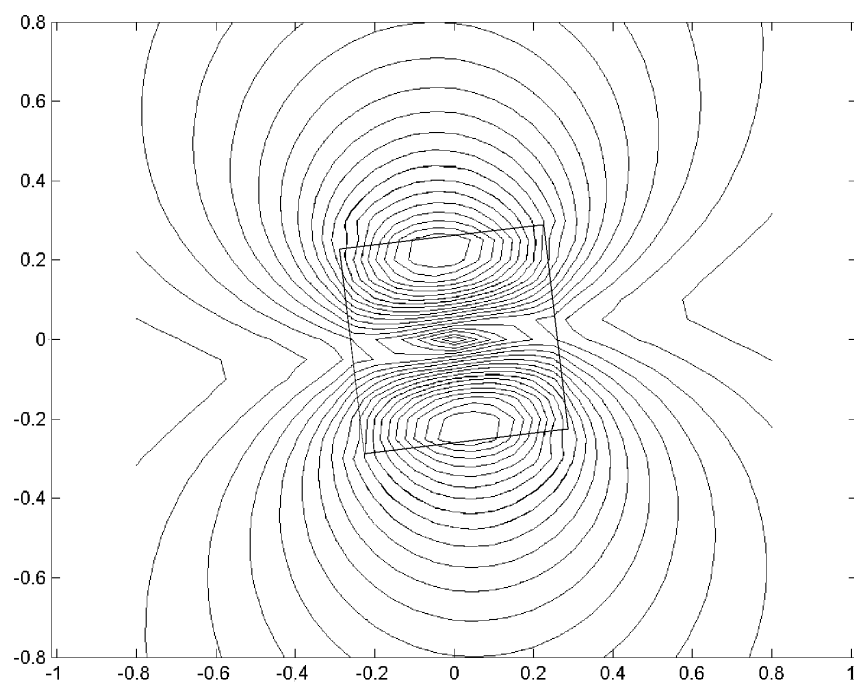


Рис. 5. Линии уровня функции  $|E_z|$  для волновода квадратного поперечного сечения

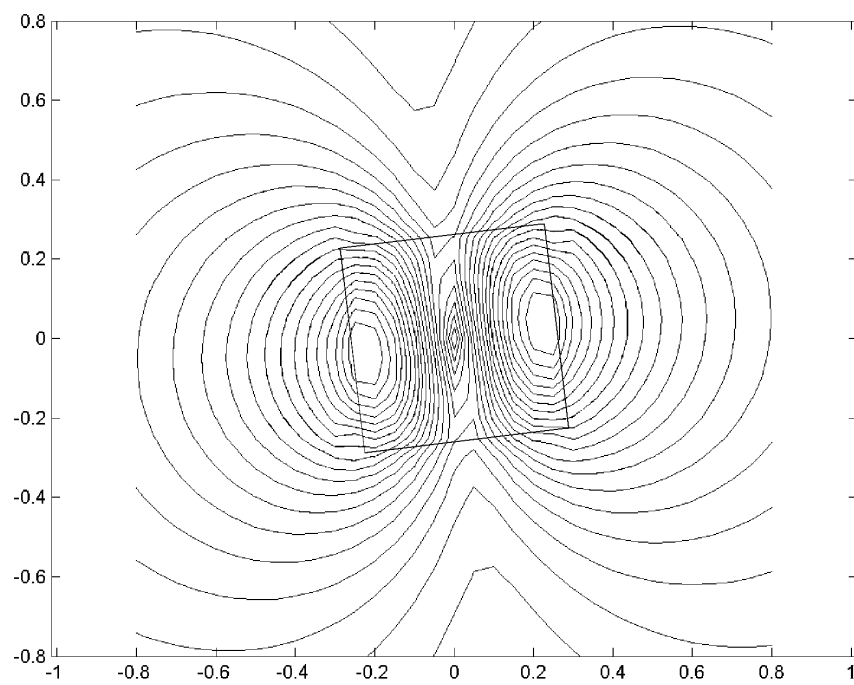


Рис. 6. Линии уровня функции  $|H_z|$  для волновода квадратного поперечного сечения

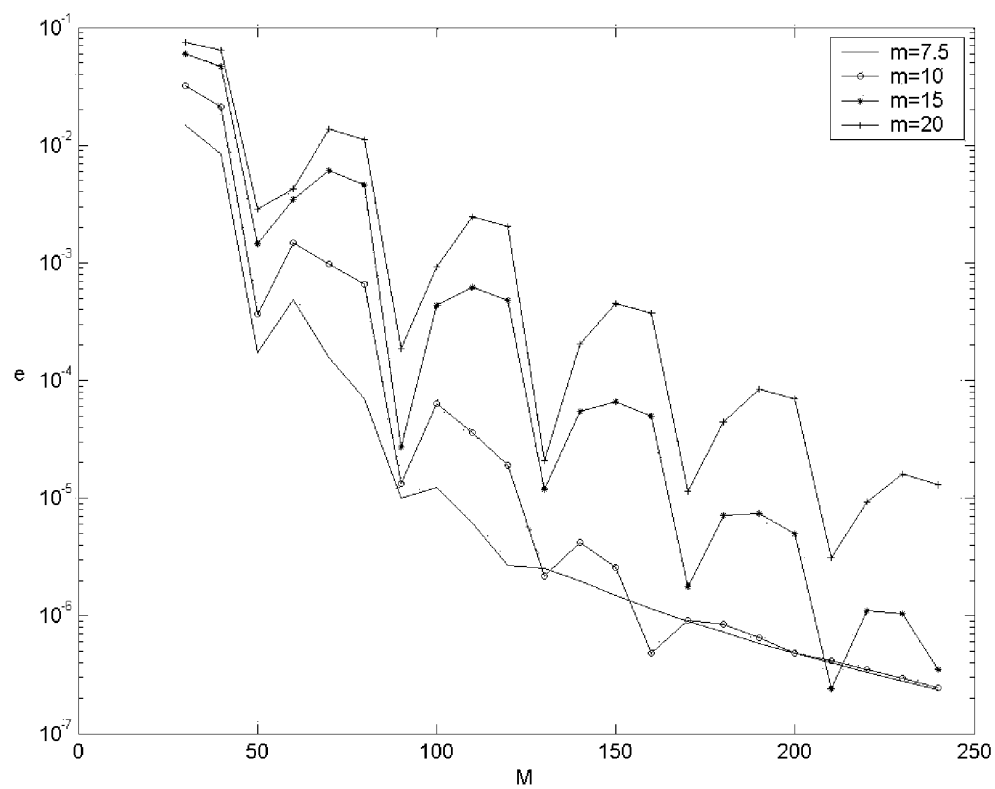


Рис. 7. Зависимость относительной ошибки  $e$  метода Галеркина от числа базисных функций  $M$  и параметра  $m$ , определяющего “гладкость” контура  $\Gamma$

---

---

## Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. Вайникко Г.М. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 6. — С. 1393–1408.
3. Веселов Г.И. О спектре комплексных волн круглого диэлектрического волновода / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника. — 1983. — № 2. — С. 55–58.
4. Векуа И.Н. О метагармонических функциях / И.Н. Векуа // Труды Тбилисского Матем. ин-та. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
6. Войтович Н.Н. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н.Н. Войтович, Б.З. Каценеленбаум, А.Н. Сивов, А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 7. — С. 1245–1263.
7. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1994. — 288 с.
8. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1995. — 231 с.
9. Гохберг И.Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 44–118.

10. Дмитриев В.И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 166 с.
11. Захаров Е.В. Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения / Е.В. Захаров, Х.Д. Икрамов, А.Н. Сивов // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 71–85.
12. Ильинский А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
13. Ильинский А.С. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопалов. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 184 с.
14. Карпенко В.А. Теоретические и экспериментальные исследования прямоугольного диэлектрического волновода / В.А. Карпенко, Ю.Д. Столяров, В.Ф. Холомеев // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25. — № 1. — С. 51–57.
15. Карчевский Е.М. К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39. — № 9. — С. 1558–1563.
16. Карчевский Е.М. Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 7. — С. 998–999.
17. Карчевский Е.М. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.
18. Каценеленбаум Б.З. Симметричное и несимметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра / Б.З. Каценеленбаум // Журнал технической физики. — 1949. — Т. 19. — № 10. — С. 1168–1181.
19. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.

20. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И.К. Лифанов. — М.: ТОО “Янус”, 1995. — 519 с.
21. Малов А.В. Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений / А.В. Малов, В.В. Солодухов, А.А. Чурилин // Антенны. — М.: Радио и связь, 1984. — Вып. 31. — С. 189–195.
22. Маркузе Д. Оптические волноводы / Д. Маркузе. — М.: Мир, 1974. — 576 с.
23. Муравей Л.А. Аналитическое продолжение по параметру функций Грина внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца / Л.А. Муравей // Матем. сборник. — 1978. — Т. 105. — № 1. — С. 63–108.
24. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 600 с.
25. Никифоров А.Ф. Основы теории специальных функций / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
26. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 543 с.
27. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 3. — С. 345–347.
28. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 1. — С. 71–74.
29. Снайдер А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. — М.: Радио и связь, 1987. — 656 с.
30. Цецохо В.А. Задача об излучении электромагнитных волн в слоистой среде с осевой симметрией // Вычислительные системы. Новосибирск, 1964. — Вып. 12. — С. 52–78.
31. Шестопапов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В.П. Шестопапов. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.



32. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
33. Bagby J.S. Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides / J.S. Bagby, D.P. Nyquist, B.C. Drachman // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1985. — MTT-29. — P. 906–915.
34. Bagby J.S. Dyadic Green's functions for integrated electronic and optical circuits / J.S. Bagby, D.P. Nyquist // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1987. — MTT-35 — P. 206–210.
35. Collin R.E. Field Theory of Guided Waves / R.E. Collin. — New York: IEEE Press, 1991. — 578 p.
36. Colton D. Time harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium / D. Colton, R. Kress // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. — 1990. — V. 116A. — P. 279–293.
37. Kartchevski E.M. Green's function expansions in dyadic root functions for shielded layered waveguide problems obtained via residue theory / G.W. Hanson, A.I. Nosich, E.M. Kartchevski // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2003. — V. 17. — № 5. — P. 759–761.
38. Eyges L. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. — 1979. — V. 69. — № 9. — P. 1226–1235.
39. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators / L. Hörmander. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 379 p.
40. Jablonski T.F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides / T.F. Jablonski // J. Opt. Soc. Am. A. — 1994. — V. 11. — № 4. — P. 1272–1282.
41. Jablonski T.F. Analysis of dielectric guiding structures by the iterative eigenfunction expansion method / T.F. Jablonski, M.J. Sowinski // IEEE Trans. Microwave Theory Techniques. — 1989. — MTT-37. — P. 63–70.
42. Kress R. Linear Integral Equations / R. Kress. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 365 p.

43. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides / D. Marcuse. — New York: Academic Press, 1972. — 457 p.
44. Mikhlin S.G. Singular Integral Operators / S.G. Mikhlin, S. Prossdorf. — Berlin: Springer-Verlag, 1986. — 528 p.
45. Nosich A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering / A.I. Nosich // J. Electromag. Waves Applicat. — 1994. — V. 8. — № 3. — P. 329–353.
46. Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — V. 22. — № 5. — P. 914–923.
47. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen fur die Wellengleichung / H. Reichardt // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. — 1960. — V. 24. — P. 41–53.
48. Rozzi T. Open Electromagnetic Waveguides / T. Rozzi, M. Mongiardo. — London: IEE Publ., 1997. — 375 p.
49. Shestopalov Yu.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics / Yu.V. Shestopalov, Yu.G. Smirnov, E.V. Chernokozhin. — VSP, 2000. — 117 p.
50. Snyder A.W. Leaky-ray theory of optical waveguides of circular cross section / A.W. Snyder // Appl. Phys. — 1974. — V. 4. — P. 273–298.
51. Steinberg S. Meromorphic families of compact operators / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — № 5. — P. 372–379.